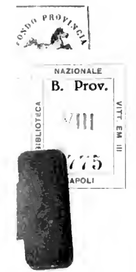
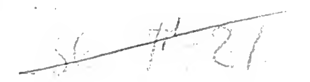
BAILLY

Essai sur la Théorie

des

SATELLITES DE JUPITER


FONDO PROVINCIA
NAZIONALE
B. Prov.
VIII
775
BIBLIOTECA
VITT. EM III
APOLI







ESSAI
SUR LA THÉORIE
DES
SATELLITES DE JUPITER,

SUIVI DES TABLES DE LEURS MOUVEMENS, déduits du Principe de la Gravitation Universelle;

PAR M. BAILLY, Garde des Tableaux du Roi en survivance, de l'Académie Royale des Sciences;

AVEC

Les Tables de Jupiter, par M. JEAURAT, Professeur de Mathématiques à l'Ecole Royale & Militaire, de l'Académie Royale des Sciences.

Cæca regens filo vestigia.... *Æneid.* Lib. VI.



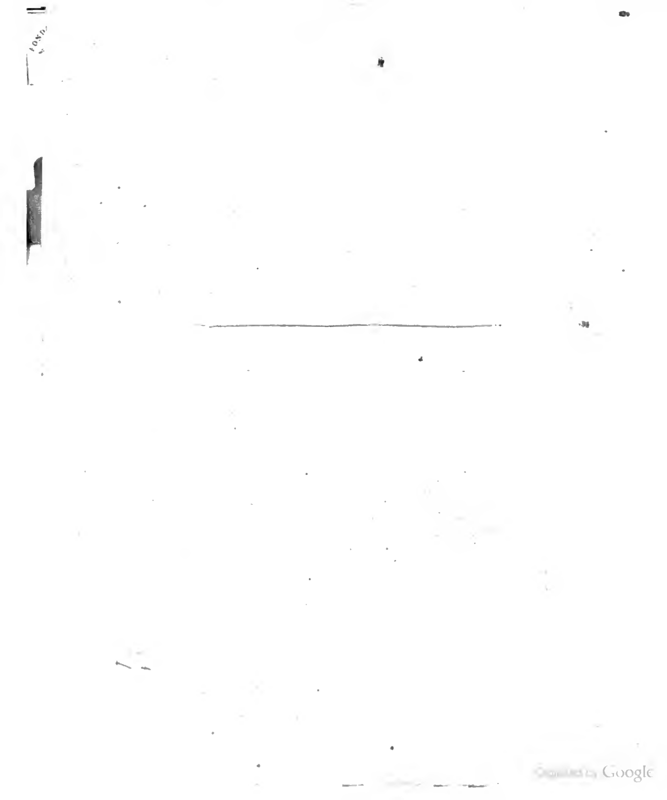


A PARIS,

Chez NYON, Libraire, Quai des Augustins, à l'Occasion.

M. DCC. LXVI.

Avec Approbation, & Privilege du Roi.



PRÉFACE.

JE CROIS être le premier qui aie tenté d'appliquer la Géométrie à la Théorie des Satellites de Jupiter. Newton avoit apprécié quels devoient être la *variation* [a], le mouvement de l'apside & des nœuds, & il en avoit fait l'application au quatrieme ; mais dans ce calcul il ne considéroit que les perturbations du Soleil. D'ailleurs il n'y a pas fait entrer l'excentricité du Satellite, qui produit une équation assez sensible.

L'envie de m'instruire & d'être utile en m'exerçant, me fit concevoir le projet de déterminer les inégalités de Jupiter, en supposant toutes les causes de perturbations que l'on peut soupçonner.

L'entreprise étoit grande, & j'avoue qu'elle surpassoit peut-être mes forces : mais j'avois alors deux Maîtres [b] dont les lumieres m'auroient conduit au but que je me proposois, & j'avois devant moi tout le tems nécessaire pour vaincre les obstacles par des études relatives. Les Sciences ont perdu ces deux Hommes illustres, dans la force de leur âge : une mort prématurée a terminé leurs travaux & leurs succès, & m'a privé des ressources sur lesquelles j'avois fondé mes espérances. Je me suis trouvé comme un aveugle laissé sans guide au milieu d'une route presque inconnue.

J'avois commencé [c] par calculer les perturbations du Soleil, en séparant cette cause des autres ; j'ai ensuite

[a] Liv. III, Prop. XXIII.
[b] M. Clairaut & M. l'Abbé de la Caille.
[c] Mémoires de l'Académie 1763, premier Mémoire.

déterminé le changement [a] de la loi de la force centrale, produit par la figure de Jupiter, & le mouvement d'apſide qui en réſulte pour chacun des Satellites.

Voilà le point où j'étois parvenu, lorſque l'Académie propoſa, au mois d'Avril 1764, pour le ſujet du Prix de 1766, de déterminer quelles devoient être les inégalités des Satellites de Jupiter dans le ſyſtême de la gravitation univerſelle. Effrayé de penſer que je pouvois me trouver en concurrence avec les Géometres les plus célebres de l'Europe, j'étois prêt à tout abandonner : mais le deſir de ne pas perdre le tems que j'avois employé à ce travail, m'a fait ſuivre la carriere où j'étois déja entré. Je me ſuis raſſuré en ſongeant que j'avois comme eux le motif d'être utile, & qu'en leur cédant ſur l'élégance des moyens, mes vues ne pouvoient être blâmables, puiſqu'il n'étoit pas poſſible de les ſoupçonner de préſomption.

Mais il falloit donner mes Réſultats avant que les Pieces qui devoient concourir au Prix fuſſent arrivées. Le tems étoit très court, & mes lumieres ſont ſi foibles, que je ne regarde l'Ouvrage que je préſente aujourd'hui au Public, que comme l'ébauche de cette matiere importante. Peut-être que les Géometres qui l'ont traitée, n'auront pas donné à l'application de leurs ſolutions toute l'étendue que je leur donne ici. Ce léger avantage, ſans donner beaucoup d'éclat à mon travail, peut le rendre utile: & tous mes vœux ſeront remplis.

Le ſujet du Prix propoſé par l'Académie eſt auſſi

[a] Second Mémoire.

difficile qu'important ; ſon utilité ſuffiſamment connue n'a pas beſoin d'être prouvée ici : mais la difficulté ſurpaſſe encore l'idée qu'on en conçoit ſur l'énoncé du Problême.

Le Problême des trois Corps, qui n'a été réſolu juſqu'ici que par approximation, a excité les efforts des plus grands Géometres. Celui-ci ſemble d'abord plus compliqué, puiſqu'on pourroit très bien l'appeller le Problême des cinq Corps, ou même des ſix, en y admettant le Soleil. Cependant, en ne prenant qu'une planete perturbatrice, & traitant chacune ſéparément, on pourroit le réduire au Problême des trois Corps, ſi les maſſes des Satellites perturbateurs étoient connues : mais c'eſt un élément qui nous manque abſolument. Il faut donc néceſſairement recourir aux inégalités qu'on cherchoit à déterminer, & s'en ſervir au contraire pour apprécier les maſſes, au moyen de la loi des perturbations à-peu-près connue.

Mais il eſt certain que ces inégalités dont on doit ſe ſervir, ſont le réſultat de pluſieurs inégalités combinées. Chaque Satellite eſt ſoumis à l'action du Soleil, & à celle des trois Satellites voiſins : il a une équation du centre dont nous ne connoiſſons ni la quantité [a], ni l'époque, ni la période. La théorie peut donner le mouvement de l'apſide ; mais elle n'apprend rien ſur l'époque de ce mouvement, ni ſur l'excentricité. Dans la théorie des Satellites [b], où l'on ne peut obſerver

[a] Excepté le quatrieme, dont M. Maraldi a très bien déterminé l'équation du centre.

[b] On n'obſerve jamais les deux phaſes des éclipſes du premier Satellite, & très rarement celles du ſecond.

l'entrée & la ſortie dans l'ombre, il y a une difficulté de plus; l'incertitude des demi-durées. Cet obſtacle eſt très grand pour le ſecond Satellite, où l'on ignore ſi l'erreur d'une obſervation appartient à la demi-durée ou à quelque autre cauſe, parceque les variations de l'inclinaiſon ſont encore un des élémens qu'il faut tirer de l'obſervation.

Le mouvement des nœuds ajoute un embarras de plus à ce labyrinthe. Il eſt produit par quatre cauſes, & ſe fait ſur quatre orbites différentes: cependant celui dont nous avons beſoin, celui que nous obſervons, ſe fait ſur une ſeule de ces orbites, l'écliptique de Jupiter, & eſt dû à la combinaiſon des quatre. Les variations de l'inclinaiſon qu'ils produiſent, s'y joignent encore. Les demi-durées obſervées ne donnent qu'une quantité qui eſt le produit du ſinus de l'inclinaiſon par le ſinus de la diſtance au nœud. On ne peut avoir l'un qu'en ſuppoſant l'autre connu. Il eſt aiſé de ſentir quelle incertitude il en réſulte pour l'un & pour l'autre. Si l'on joint à ces ſources d'erreur, l'erreur du lieu de Jupiter, calculé ſur les Tables; celle de l'obſervation; les inégalités optiques, découvertes par M. de Fouchy; le défaut de connoiſſance de la différence des méridiens, preſque toujours établie ſur les obſervations mêmes; le peu d'ancienneté des obſervations exactes, puiſqu'elles n'ont gueres plus de cent ans, tandis qu'il y a tel Satellite qui en exigeroit une ſuite de trois ou quatre cens ans; ſi, dis-je, on réfléchit ſur toutes ces difficultés, on ſe convaincra que jamais matiere n'a fourni plus d'obſtacles, & que le génie, qui ſemble fait pour lever

le voile de la Nature, faute d'un point fixe d'où il puisse prendre son vol, fera moins ici que la discussion secondée par le tems.

Je me suis donc livré à cette discussion, sans autre secours que les Livres de Newton, les Principes de M. Clairaut, beaucoup d'observations que M. de Maraldi a bien voulu me communiquer, & la patience nécessaire pour découvrir la vérité enveloppée dans une immensité de calculs pénibles.

J'ai préféré la solution de M. Clairaut, parcequ'étant mon ami, nous l'avions lue ensemble, & qu'il étoit à portée de m'aider de ses avis pour surmonter les obstacles qui pouvoient se présenter.

Je dois avertir ici, que dans les Problêmes où j'ai cherché à déterminer les inégalités du mouvement des Satellites dans leur orbite, je les ai considérés comme mus dans le même plan. Leurs inclinaisons sont si petites, que les changemens qu'elles peuvent produire dans ces inégalités, sont absolument négligeables.

L'Essai que je mets au jour n'est que l'ébauche de la théorie à laquelle je me propose de travailler. Je reverrai séparément celle de chaque Satellite; & en discutant toutes les observations, je me mettrai en état d'en déterminer avec plus de précision les élémens. Le terme que j'avois mis à mon travail ne m'a pas permis d'employer un assez grand nombre d'observations pour atteindre à toute la perfection qu'on peut espérer.

Les Tables construites sur les principes établis dans cet Ouvrage, prouvent que les inégalités des Satellites de Jupiter se déduisent très bien de la théorie de la

gravitation. C'étoit un point bien intéressant à constater. Ce systême fameux s'établit tous les jours sur des fondemens plus solides : chaque phénomene que le tems nous dévoile sert à l'appuyer ; & la récompense la plus flatteuse de mon travail étoit de fournir une nouvelle preuve de la conformité de la loi de l'attraction aux loix de la nature. Je me flatte de plus, que ces Tables paroîtront meilleures que celles qui ont été publiées jusqu'ici ; & cela doit être, puisqu'il n'y a aucune équation empyrique. Mais comme elles ont encore besoin d'être perfectionnées, je ne les aurois pas données, si je n'avois pas voulu faire voir ce qu'on pouvoit attendre de la théorie.

Les erreurs, dans le calcul des observations du premier, sont rarement au-dessus d'une minute ; celles du second & du troisieme n'excedent gueres deux à trois minutes, au lieu de six à sept que l'on trouve souvent dans les meilleures Tables.

On peut se mettre au fait de l'accord du calcul & des observations, en parcourant les Tables comparées qui sont à la fin de cet Ouvrage. Si l'on établit que l'erreur moyenne, dans la théorie du premier Satellite, soit d'environ quarante-cinq secondes, cela doit faire une minute & demie pour celle du second, & trois minutes pour celle du troisieme. Quelqu'exacte que soit l'hypothese qui représente les demi-durées du second, il est possible qu'il s'y trouve une minute ou une minute & demie d'erreur dans les cas les plus défavorables : il est donc difficile que les erreurs n'aillent quelquefois à trois minutes dans la théorie du second

&

& du troisieme ; je parle ici des plus fortes, qui sont rares.

A l'égard des observations du troisieme ; jusqu'à ce que les variations de son inclinaison soient mieux connues, je crois qu'on ne peut employer avec sureté, que celles où les deux phases ont été observées.

J'espere que M. Wargentin ne trouvera point mauvais que j'aie mis à côté de l'erreur de mes Tables, l'erreur des siennes. Si celles que je publie ont quelque avantage, c'est d'être plus nouvelles : c'en est un en Astronomie ; & le mien est d'avoir profité de ses travaux & de ses lumieres. De plus, les masses que j'ai appréciées m'ont mis à portée de calculer les perturbations. C'est un moyen de perfection qui a manqué jusqu'ici. J'ai été assez heureux pour l'avoir cherché le premier ; & le fruit que j'en devois recueillir, étoit de rendre les Tables meilleures.

Mais je déclare en même tems, que les calculs faits sur les Tables de M. Wargentin & sur les miennes, ont été faits très vîte, & n'ont pu être vérifiés, à cause du peu de loisir qui me restoit : je puis donc m'être trompé à son désavantage comme au mien.

J'ai cru qu'il ne seroit pas inutile de placer à la tête de cet Ouvrage, un Discours dans lequel je tracerois historiquement les progrès de l'Astronomie des Satellites, depuis leur découverte jusqu'à présent ; où je ferois voir le point où cette Science étoit parvenue lorsque j'y ai appliqué mes recherches, la perfection à laquelle il s'agissoit d'atteindre, les obstacles qui s'y opposoient, & les foibles succès dont mes efforts ont

été récompensés. Ce Discours est destiné aux gens qui ne connoissent pas la question, son importance & ses difficultés. Les Lecteurs plus instruits voudront bien me pardonner si je dis des choses qu'ils doivent savoir. En dépouillant les Sciences physico-mathématiques de l'appareil de la Géométrie & de l'Algebre, on peut rendre leurs vérités sensibles à l'esprit; on peut lui faire appercevoir la chaîne qui les lie. Les lumieres générales s'étendent; & les connoissances ainsi semées au hasard, excitant la curiosité par l'admiration, en produiront un jour de nouvelles.



HISTOIRE
DE L'ASTRONOMIE
DES SATELLITES DE JUPITER.

L'Histoire des Sciences eſt une des branches de l'Hiſtoire de l'eſprit humain. Elles forment un ſyſtême de connoiſſances dont les progrès ſuivent la marche du tems, & lient les ſiecles les uns avec les autres. C'eſt une échelle appuyée ſur l'enfance du Monde, dont le ſommet eſt dans le ſein de Dieu.

Si l'étendue des ſens répondoit à celle des deſirs de l'homme, ſa curioſité atteindroit les bornes de l'Univers. Il a découvert l'art d'augmenter preſque à volonté la force de ſa vuë; & ne pouvant s'élancer juſqu'aux objets qu'il veut connoître, il les a forcés de ſe rapprocher.

Au commencement du dix-ſeptieme ſiecle, la découverte du téleſcope prépara le regne de l'Aſtronomie. Quelques vérités brilloient au milieu des ténebres, tandis que l'ignorance luttoit encore contre la Philoſophie. Kepler venoit de découvrir la forme des orbites des planetes, & les loix de leur mouvement: mais le véritable arangement du ſyſtême du Monde étoit encore une hypotheſe admiſe par quelques génies dignes des plus beaux ſiecles, & combattue par tout le reſte. Les inductions tirées de l'apparence des phénomenes & de la ſimplicité que la Nature obſerve dans ſa marche, ne frappent que les eſprits éclairés; & ceux qui ont beſoin de l'être, veulent des preuves ſenſibles. Non que l'eſprit humain ne ſoit avide de connoiſſances; mais le vulgaire, crédule à l'excès pour tout ce qui le frappe, timide quand il faut raiſonner, n'a de défiance que contre la Philoſophie.

Le haſard qui fit découvrir le téleſcope, fournit les preuves que l'on demandoit: il ouvrit le champ le plus vaſte aux découvertes. Galilée vit la Lune comme un corps ſemblable à la

Terre, couvert de cavités & de montagnes : il vit les phases de Vénus que Copernic avoit annoncées. Le mouvement de toutes les planetes autour du Soleil démontra donc le mouvement de la Terre : la force de l'analogie imposa silence aux préjugés, & le Soleil fut placé au centre du Monde, pour distribuer au loin le mouvement, la chaleur & la vie. En vain l'ignorance osa s'appuyer d'une autorité respectable : la vérité prévalut aux yeux de ceux même qui vouloient la proscrire, & la Religion, vraiment éclairée, reconnut que la Nature ne pouvoit jamais lui être contraire, puisqu'elles avoient le même Auteur.

C'est à cette époque brillante de l'Histoire de l'Astronomie, que fut faite la découverte des Satellites de Jupiter. Galilée le premier tourna le télescope vers le Ciel : il parcourut avec avidité ce nouveau domaine offert à la curiosité humaine. Après avoir porté ses regards sur la Lune, ils tomberent sur Jupiter. Le 8 Janvier 1610., il apperçut auprès de cette planete, trois étoiles, dont deux étoient d'un côté, & la troisieme de l'autre. Il les regarda d'abord comme des étoiles fixes, dont la petitesse se déroboit à la vue simple : mais le lendemain, ayant de nouveau considéré Jupiter, il s'apperçut qu'elles avoient changé de place. Cette circonstance fixa son attention : & continuant de les observer tous les jours, il découvrit le quatrieme qui lui avoit échappé, & il s'assura bientôt que Jupiter étoit accompagné de quatre petites planetes, qui tournoient autour de lui, comme la Lune autour de la Terre.

Que l'on juge de la satisfaction d'un Philosophe à la vue d'un tel spectacle ! Le système de l'Univers s'aggrandit, il s'enrichit de quatre nouvelles planetes : un nouvel ordre de choses se découvre, & prouve qu'il y a des planetes enchaînées à la suite d'une autre par une force inconnue.

Les objections faites contre le Satellite de la Terre tomberent d'elles mêmes. En faisant tourner toutes les planetes autour du Soleil, on trouvoit singulier que la Lune, exceptée de la loi générale, fût asservie à suivre la Terre. La nouvelle découverte changea la face des choses, & ramena l'analogie en faveur du système de Copernic : il fut permis à la Terre d'avoir un Satellite, puisque Jupiter en avoit quatre.

Ces aſtres, inconnus pendant une longue ſuite de ſiecles, ont été long-tems inutiles à l'homme : ils exiſtoient ſans être vus; & ils prouveroient que les mondes qui compoſent le ſyſtême ſolaire, ne ſont qu'accidentellement les flambeaux de nos nuits, ſi, dans ce ſiecle philoſophique, cette vérité avoit beſoin d'être prouvée.

Galilée ſe hâta de publier, dès le mois de Mars 1610, la découverte & les obſervations qu'il avoit faites : il oſa même, au commencement de 1613, prédire leurs configurations pour deux mois conſécutifs. On entend par configurations des Satellites, leur poſition, ſoit orientale, ou occidentale, à l'égard de Jupiter, & leur diſtance au centre de cette planete. On peut en prendre une idée par la *Fig.* 1, où les Satellites ſont déſignés par les chiffres 1, 2, 3, 4. Cette Figure doit ſervir à les diſtinguer entr'eux lorſqu'on les obſerve.

Simon Marius, Aſtronome de l'Electeur de Brandebourg, revendiqua en 1614 la découverte des Satellites de Jupiter : il proteſta les avoir vus dès le mois de Décembre 1609, & atteſta de la vérité du fait M. Fuchs à Bimbach, Conſeiller intime de l'Electeur. On n'a pu éclaircir ſi ſes prétentions étoient juſtes ; mais Galilée avoit à lui oppoſer quatre ans de date à l'égard du Public, & tout le poids d'un nom célebre, qui prévient les eſprits & entraîne les ſuffrages. Auſſi la gloire en eſt reſtée à Galilée.

Dans la ſuite des travaux dont nous allons rendre compte, deux choſes me paroiſſent devoir exciter l'admiration. La premiere, c'eſt la hardieſſe de l'homme à lever les voiles de la Nature, & à découvrir le jeu des reſſorts qu'elle a placés ſi loin de lui. La ſeconde, c'eſt l'empire qu'il exerce ſur tout ce qui l'entoure, pour le plier à ſon uſage. Ces aſtres, que plus de cent millions de nos lieues ſéparent de lui, que leur petiteſſe dérobe à ſa vue, ne peuvent ſe dérober à ſes recherches : il ſuffit que le haſard ait mis entre ſes mains l'inſtrument qui les lui fait appercevoir, leurs mouvemens compliqués par la multiplicité des cauſes n'ont gueres de myſteres qu'il ne pénetre. Il les ſuit dans leur marche, il oſe la prédire ; & ſi la perfection à laquelle il ne peut jamais atteindre, lui refuſe une préciſion rigoureuſe dans ſes prédictions, il oſe encore aſſigner les limites des erreurs

qu'il peut commettre. Ce ne ſeroit point aſſez pour lui d'avoir rangé ces mouvemens au nombre de ſes connoiſſances, ils vont lui ſervir de guide dans ſes voyages, & il interrogera ces petits globes pour leur demander la deſcription du ſien.

Galilée ayant continué ſes obſervations, pénétra d'un coup d'œil toute l'utilité qu'on en pouvoit retirer, & conçut le magnifique projet de les faire ſervir à la recherche des longitudes. On ne connut d'abord la ſurface de la Terre que par les relations des Voyageurs : la diſtance des différens lieux, & leur poſition reſpective, n'étoient eſtimées que par le chemin qu'on avoit fait, & le ſens dans lequel on avoit marché. Il eſt aiſé de ſentir combien ces moyens étoient défectueux. Hipparque & Ptolemée inventerent la méthode de meſurer la diſtance des lieux par longitude & latitude. Cette méthode eſt exacte & ſure. Ils appellerent latitude, la diſtance du lieu à l'équateur terreſtre : la longitude fut meſurée par les degrés de l'équateur même. On la compte de l'Oueſt à l'Eſt. Par le pole & par les deux lieux dont on cherche la différence de longitude, on fait paſſer deux cercles qui coupent l'équateur, & l'arc de l'équateur compris entre les ſections de ces deux cercles, eſt la différence de longitude de ces lieux.

Hipparque & Ptolemée montrerent que la recherche des latitudes & des longitudes dépendoit des obſervations aſtronomiques. On détermine la latitude [a] en obſervant la hauteur des aſtres ſur l'horiſon. A l'égard de la longitude; qu'on imagine un cercle qui paſſe par les poles du Monde & par le Soleil : la Terre en tournant ſur ſon axe en vingt-quatre heures, amenera ſucceſſivement toutes ſes différentes parties perpendiculairement

[a] Les Aſtronomes connoiſſent exactement les déclinaiſons des étoiles ou du Soleil chaque jour, c'eſt-à-dire, leur diſtance à l'équateur. Ils obſervent [*Fig.* 5.] la hauteur *H S* du Soleil ou d'une étoile ſur l'horiſon, dans l'inſtant où ces aſtres ſont dans le méridien : ils retranchent de cette hauteur, ou ils y ajoutent la déclinaiſon *E S*, ſelon que ces aſtres ſont au-deſſus ou au-deſſous de l'équateur, & ils obtiennent par conſéquent la hauteur de l'équateur *H E*. Mais *e k* eſt la latitude du lieu, & l'angle *e c k* eſt égal à l'angle *E C Z* : donc, ſi de l'angle droit *H C Z*, on retranche la hauteur de l'équateur, on aura la diſtance du zénith à l'équateur égale à la latitude du lieu Le 24 Mai 1765, à midi, on a obſervé, à l'Obſervatoire Royal de Paris, la hauteur du Soleil 62° 23′ 12″ : la déclinaiſon du Soleil étoit ce jour-là boréale, c'eſt-à-dire qu'il étoit plus élevé que l'équateur de 21° 13′ 26″ ; donc la hauteur de l'équateur eſt à l'Obſervatoire, de 41° 9′ 46″ ; par conſéquent la diſtance du zénith à l'équateur, ou la latitude de Paris, eſt de 48° 50′ 14″.

au-dessous de ce cercle : c'est l'instant de midi. Les 360 degrés de l'équateur y passeront en vingt-quatre heures : donc 15 degrés de longitude répondent à une heure, & 15 minutes de degrés à une minute d'heure. Une ville qui sera de 15 degrés de longitude plus à l'Ouest que Paris, aura donc midi une heure plus tard ; c'est-à-dire qu'elle aura midi lorsqu'il sera à Paris une heure après midi. C'est ce que l'on peut vérifier aisément au moyen d'un globe terrestre. Il s'ensuit de-là, que la différence de longitude de deux villes dépend de la différence du tems que l'on y compte au même instant. Les phénomenes célestes sont des signaux donnés à tout l'hémisphere. Si dans chacune de ces deux villes on a marqué l'instant auquel le même phénomene a été apperçu, on saura quelle heure on comptoit dans ces deux villes au même instant. Je suppose qu'on ait observé à Paris le commencement d'une éclipse de Lune à $4^h 16' 20''$ du soir, & que le même jour à Pekin on ait observé le commencement de cette éclipse à $11^h 52' 44''$ du soir ; cette observation fait voir que l'on compte à Pekin $7^h 36' 24''$ de plus qu'à Paris. Or, à raison de $15°$ par heure, $7^h 36' 24''$ répondent à $114° 6'$: la différence de longitude entre Paris & Pekin est donc de $114° 6'$, dont Pekin est plus à l'Est.

Maintenant il est facile de faire voir l'usage de ces connoissances. On prend un globe sur lequel on a dessein de tracer un tableau de la superficie de la Terre, c'est-à-dire, la position de ses différentes parties : on y trace l'équateur, & sur ce cercle on prend un arc de $114° 6'$. Par les extrémités de cet arc, & par les poles, on fait passer deux cercles. Sur le premier, à la distance de $48° 50'$ de l'équateur, on marque un point qui désigne Paris : sur le second, à la distance [a] de $39° 54'$ de l'équateur, on marque un autre point qui représente Pekin ; & l'on parvient ainsi à avoir sur le globe la vraie position respective de ces deux villes. En répétant la même opération sur une infinité de villes, de montagnes, de caps, d'isles, dont on compare la position à celle de l'une des deux villes déja fixée, on parvient à représenter non seulement l'intérieur des terres connues, mais les longs contours des côtes, & toutes les parties du monde où les

[a] La latitude de Pekin est de $39° 54'$.

hommes ont pu pénétrer. Voilà la méthode que nous laissa Ptolemée; mais les moyens d'en faire usage n'étoient pas entre ses mains. Il eût fallu un grand nombre d'observations astronomiques, & il y en avoit très peu de son tems; tant parcequ'il n'y avoit gueres d'Observateurs, que parceque les observations propres à cette recherche étoient assez rares. Ptolemée donna les vrais principes de la Géographie; mais cette science resta long-tems dans l'enfance, ses progrès furent fort lents. C'étoit cependant un projet intéressant, digne des efforts de l'esprit humain, que celui de décrire le globe que nous habitons: les dangers de la navigation le rendoient important. L'ambition & la cupidité ont donné naissance au commerce maritime; la balance politique l'a rendu nécessaire. Il est de l'humanité, il est de la sagesse du Gouvernement de remédier aux maux qu'on ne peut plus éviter. Les nations commerçantes devoient s'intéresser vivement au succès du projet de Galilée, & les Etats de Hollande lui promirent de grandes récompenses, s'il réussissoit. Ce grand homme considéra que Jupiter étant visible pendant dix mois de l'année, la vîtesse du mouvement des Satellites devoit multiplier les observations qu'on en pouvoit faire, & offroit un moyen facile de déterminer les longitudes, en comparant les mêmes observations faites en différens lieux. Nous ignorons de quelles observations des Satellites il comptoit se servir dans cette recherche. Les Etats de Hollande lui envoyerent, en 1636, Hortensius & Blaeu pour l'aider dans cette entreprise : mais à peine étoient-ils arrivés, que le plus grand malheur qui puisse affliger un homme curieux d'observer, vint terminer la carriere de Galilée: une fluxion le priva de la vue; le ciel, dont tant d'aveugles jouissent, fut à jamais fermé pour celui qui savoit le voir. Il passa les six dernieres années de sa vie à regretter le spectacle de la Nature, & les découvertes qu'il auroit pu y faire. Les espérances que son projet avoit fait concevoir s'évanouirent, jusqu'à Dominique Cassini, qui les fit renaître & les remplit.

Dans le même tems, Peiresc en France, après avoir appris la découverte des Satellites faite par Galilée, avoit entrepris de travailler aux Tables de leurs mouvemens. Plusieurs Astronomes, & Morin principalement, l'aiderent dans ce projet. Morin inventa

une théorie méchanique pour trouver en tout tems les lieux de ces Satellites : mais il est vraisemblable qu'il ne la jugea point assez bonne, puisqu'il ne la donna pas au Public. Il croyoit qu'en observant, en différens lieux de la Terre, les *configurations* de ces Satellites, on pouvoit déterminer exactement les distances, & s'en servir à corriger les cartes géographique & à perfectionner la navigation. On fit diverses épreuves : un Observateur alla vers l'Orient jusqu'à Alep; mais le succès ne remplit pas l'attente de Morin; & il vit que sa méthode avoit plus d'inconvéniens qu'il ne l'avoit imaginé. Il abandonna même entiérement cette entreprise, lorsqu'il sut que Galilée s'en occupoit, & qu'il étoit en traité avec les Hollandois.

Après la mort de Galilée, Vincent Reyneri fut chargé par le Grand Duc de Toscane, de continuer les observations, & d'en construire des Tables. Il y travailla dix ans; mais sa mort fit perdre tout le fruit qu'on en attendoit : ses papiers disparurent avec lui. Malgré les recherches que fit faire le Grand Duc, les observations de Galilée, dont Reyneri son disciple étoit possesseur, furent en même tems perdues.

Les travaux de Galilée avoient excité l'émulation des Savans. Hodierna, Marius, Hérigone, Hévélius, ne réussirent pas mieux que Morin. Borelli approcha de la vérité dans quelques points; mais il échoua, comme les autres, sur le plus important.

La plupart de ces Astronomes connurent si imparfaitement les mouvemens des Satellites, que leurs Tables étoient fort éloignées de les représenter. On n'observa d'abord que les configurarions de ces planeres à l'égard de Jupiter; & dans la figure que l'on en traçoit, on ne prenoit pas la peine de les distinguer les unes des autres : on comptoit apparemment faire cette distinction à loisir, ou l'on en laissoit le soin à ceux qui vouloient faire usage des observations. Avant que les mouvemens des Satellites aient été à-peu-près connus, on n'avoit d'autre indice pour les reconnoître, que la différence de grandeur & d'éclat. Le troisieme étoit le plus brillant; le quatrieme étoit le plus petit; les deux autres se confondoient aisément. Mais, si l'éclat & la grandeur du quatrieme varient sensiblement, c'étoit une source d'erreur de plus. Il est vrai que comme il est le plus éloigné, on peut le reconnoître à ce qu'il s'écarte plus

que tous les autres du centre de Jupiter. On appelle *digression* cette distance du Satellite au centre de la planete : le point de la plus grande digression est donc celui où il cesse de s'en éloigner, & où il commence de s'en rapprocher. Aussi, dans les premiers tems de la découverte des Satellites, il paroît que Galilée lui-même ne savoit distinguer que le quatrieme. Cette difficulté fut long-tems un obstacle.

Enfin, Dominique Cassini, l'un des plus grands hommes que le dix-septieme siecle ait vu fleurir, &, si j'ose le dire, le fondateur de l'Astronomie moderne, fut le premier qui débrouilla la théorie [a] des Satellites. Il publia ses Tables en *1666*. L'étonnement fut général dans l'Europe : le grand nombre de ceux qui avoient échoué avoit découragé les Savans, & personne n'osoit entrer dans la carriere. M. Cassini ouvrit & applanit le chemin à ceux qui l'ont suivi. M. Picard fut frappé de l'accord qui regnoit entre l'observation & le calcul fait sur ces Tables : il les trouva plus exactes que l'Auteur même n'avoit osé l'espérer, parceque s'étant hâté de les mettre au jour, il ne leur avoit pas donné toute la perfection qu'il entrevoyoit déja.

La premiere chose que M. Cassini eut à faire, ce fut de déterminer les révolutions périodiques, c'est-à-dire, le tems que les Satellites emploient à faire le tour de Jupiter. Il remarqua que les observations les plus exactes étoient celles de leurs éclipses. Tout corps éclairé par un flambeau quelconque, jette une ombre derriere lui : celle de Jupiter s'étend donc à l'opposite du Soleil. Les dimensions de cette ombre dépendent de la distance de Jupiter au Soleil, & du rapport des grosseurs de ces deux planetes. Si le globe du Soleil étoit plus petit que celui de Jupiter, les rayons qui touchent les deux bords de cet astre, seroient divergens, & l'ombre auroit, pour ainsi dire, la forme d'un entonnoir : si le globe du Soleil étoit égal, les rayons seroient paralleles, & l'ombre cylindrique & infinie ; mais le Soleil étant beaucoup plus gros, l'ombre a la forme d'un cône

[a] Les Astronomes entendent par le mot de *Theorie*, la réunion de toutes les connoissances de fait, nécessaires pour calculer les mouvemens des planetes. Chacune de ces connoissances en particulier a le nom d'*Elément*. On donne aussi ce nom à toutes les autres connoissances que l'on tire de l'observation des astres, soit sur leur figure, leur masse, leur densité, &c.

dont Jupiter est la base, & dont la longueur est environ un dixieme de la distance de Jupiter au Soleil.

Comme les Satellites sont à-peu-près dans le plan qui passe par Jupiter & par le Soleil, ils doivent, à chaque tour, traverser cette ombre, comme on le voit par la *Fig.* 2, & conséquemment s'éclipser [a], parceque n'étant éclairés eux-mêmes que par la lumiere du Soleil, cette lumiere est interceptée par l'opacité de Jupiter. On peut donc saisir le moment où les Satellites disparoissent en entrant dans l'ombre, & celui où ils recouvrent la lumiere quand ils en sortent : l'intervalle entre ces deux observations est la durée de l'éclipse.

Le tems écoulé entre la disparition d'un Satellite & la disparition suivante, après qu'il a fait un tour entier, fit connoître à M. Cassini la révolution périodique. C'est ainsi qu'il reconnut que celle du premier [b] étoit d'un jour 18 heures & demie, celle du second de 3 jours 13 heures, celle du troisieme de 7 jours 4 heures, enfin celle du quatrieme de 16 jours 18 heures.

Mais cette révolution périodique pouvoit être inégale, être tantôt plus courte ou tantôt plus longue, comme on s'en apperçut bientôt : l'observation même pouvoit être susceptible d'erreur. Pour découvrir la révolution périodique avec une certaine précision, il falloit donc prendre deux observations éloignées de plusieurs années, & diviser l'intervalle de tems écoulé, par le nombre des révolutions qui devoient avoir eu lieu. Alors l'erreur de l'observation se partage sur toutes les révolutions; & s'il y a 2' d'erreur, & que l'intervalle soit de cent vingt révolutions, on aura la révolution à une seconde prés ; au lieu que s'il n'y avoit eu que dix révolutions, l'erreur de cette détermination auroit été de 12 secondes.

C'est ainsi qu'on parvint à connoître assez exactement le tems de la révolution périodique : mais M. Cassini, & Galilée avant lui, s'apperçurent que les retours à l'ombre de Jupiter ne se faisoient pas en tems égaux. Cela devoit être ainsi par l'inégalité du mouvement de Jupiter ; car, dans le tems d'une révolution périodique, le Satellite parcourt le cercle entier, plus le che-

[a] Il en est des Satellites comme de notre Lune, qui s'éclipse en entrant dans l'ombre de la Terre, dans le tems où celle-ci se trouve entre le Soleil & la Lune.

[b] On nomme le premier celui qui est le plus près de Jupiter, & ainsi des autres.

min [a] que Jupiter a fait sur son orbite. Or, si dans des espaces de tems quelconques égaux, Jupiter parcourt sur son orbite un espace moindre ou plus grand, les retours à l'ombre seront accélérés ou retardés.

Je vais essayer de donner une idée de l'inégalité de Jupiter: cette explication nous servira encore par la suite. *Kepler* a fait voir que les planetes se mouvoient autour du Soleil, dans des ellipses dont cet astre occupe un des foyers *F* [*Fig* 3.], *& que les aires décrites étoient proportionnelles au tems*; c'est-à-dire que si l'aire, ou l'espace elliptique compris entre les deux rayons *AF*, *FC*, menés du foyer, est égal à l'espace compris entre les deux rayons *BF*, *FD*, menés du même foyer, la planete ne mettra pas plus de tems à parcourir l'arc *BD*, qu'elle en a mis à parcourir l'arc *AC*. Il s'ensuit de là que, lorsque les planetes sont dans la partie de leur orbite qui est la plus près du Soleil, elles se meuvent plus vîte. Les Astronomes calculent d'abord le mouvement des planetes dans leur orbite, comme s'il étoit uniforme; mais pour avoir égard à l'inégalité précédente, ils y appliquent une correction, à laquelle ils ont donné le nom d'*equation du centre.* Cette équation est commune à toutes les planetes: elle est proportionnelle à l'excentricité; car, s'il n'y avoit point d'excentricité, la courbe de l'orbite ne seroit plus une ellipse, mais un cercle; il n'y auroit plus d'inégalité dans le mouvement Les aires doivent être toujours proportionnelles au tems; mais si les espaces circulaires *FAC* & *FBD* sont égaux, les rayons du cercle étant égaux, les parties *AC* & *BD* du cercle [*Fig.* 4.] doivent être égales: les espaces parcourus en tems égaux seront donc les mêmes, & le mouvement uniforme.

L'équation du centre de Jupiter produit donc une inégalité dans les révolutions périodiques des Satellites: de maniere que les éclipses du premier arrivent quelquefois une heure & demie

[a] Si l'immersion d'un Satellite a été observée dans le point *D* de son orbite, un an après, lorsqu'il sera revenu en *D*, après avoir parcouru le cercle entier un certain nombre de fois, Jupiter étant venu de *H* en *K*; pour que le Satellite parvienne jusqu'à l'ombre, il faudra qu'il parcoure de plus l'arc *Dd*, que l'on démontre égal a celui que Jupiter a décrit dans son orbite. [*Fig.* 2].

plutôt ou plus tard, celles du quatrieme douze à treize heures, & celles des autres à proportion.

Les Satellites pouvoient avoir eux-mêmes une excentricité, & conséquemment une équation du centre; mais il n'y avoit que les observations qui pussent la faire découvrir: & jusqu'à ce qu'elles en eussent donné quelque indice sensible, il étoit naturel de supposer leur mouvement uniforme, & leur orbite circulaire.

Un élément important qu'il s'agissoit de connoître, étoit le diametre du cercle qu'ils décrivent autour de Jupiter.

Lorsqu'un Satellite est dans sa plus grande digression, c'est-à-dire, lorsqu'il est le plus éloigné de Jupiter; si de la Terre, supposée en T [*Fig.* 2.], on mesure la distance AH du Satellite au centre de Jupiter, on aura le diametre du cercle qu'il décrit.

M. Cassini mesura combien de fois cette distance contenoit le demi-diametre du disque de Jupiter: il trouva pour le premier Satellite 5 & $\frac{2}{3}$, pour le second 9, pour le troisieme 14 $\frac{1}{3}$, pour le quatrieme 25 & $\frac{1}{3}$. Kepler, outre la loi dont nous avons parlé plus haut, *que les aires décrites sont proportionnelles au tems*, avoit encore découvert une autre loi du mouvement des planetes, loi qui avoit lieu pour toutes les planetes connues alors, c'est que *les révolutions périodiques sont entre elles comme les racines quarrées du cube des diametres de leurs orbites.* Si donc le diametre de l'orbite d'une planete est 4, celui de l'orbite d'une autre 9, la révolution de la premiere sera à celle de la seconde, comme 8 est à 27.

Le rapport des révolutions périodiques aux distances des Satellites à Jupiter est précisément celui qu'exige cette loi. Il est donc démontré par-là, que, quelles que soient les causes du mouvement des astres, elles sont telles que les deux loix de Kepler en dérivent nécessairement. Découverte admirable, & qui est aujourd'hui le fondement de la théorie du systême du Monde!

Aussi-tôt que M. Cassini connut assez les révolutions des Satellites pour pouvoir les distinguer entr'eux, il s'occupa du projet de Galilée, de les appliquer à la découverte des longitudes.

La seule méthode exacte est d'employer l'observation des phénomenes célestes. On se servit d'abord, comme nous l'avons dit plus haut, des éclipses de Lune. En effet, quand cet astre entre dans l'ombre de la Terre, son immersion est apperçue en même tems de tout l'hémisphere sur lequel il est visible. Mais l'ombre de la Terre est environnée d'une pénombre tantôt plus ou moins épaisse : on ne peut estimer le commencement ou la fin d'une éclipse de Lune qu'à quelques minutes près ; & l'erreur ou l'incertitude de l'observation tombe toute entiere sur la différence de longitude des deux villes qu'on en voudroit conclure.

On y employa aussi les éclipses du Soleil ; mais ces observations exigent de longs calculs, & veulent être faites avec une grande précision, pour qu'on puisse en retirer quelque fruit. Les observations les plus propres à la recherche des longitudes seroient les éclipses des étoiles par la Lune. La Lune dans son cours rencontre un grand nombre d'étoiles fixes ; elle doit donc quelquefois les éclipser, lorsqu'elle se trouve directement entre ces étoiles & nous. Quand l'étoile se cache derriere le bord de la Lune, sa disparition est instantanée, & peut être saisie par conséquent avec beaucoup de précision. Ces observations sont donc excellentes ; mais elles ne sont pas assez fréquentes. Les petites étoiles sont effacées par l'éclat de la lumiere de la Lune : il n'y a que les étoiles d'une grandeur assez considérable, dont les éclipses puissent être observées facilement ; mais ces éclipses sont rares, il n'y en a jamais qu'un très petit nombre dans une année. Les éclipses de Soleil & de Lune sont encore plus rares : celles des Satellites de Jupiter arrivent presque tous les jours, & il peut y en avoir plusieurs dans le même jour. Ce moyen est donc très utile pour la détermination des longitudes, tant parcequ'il est susceptible d'une précision assez grande, que parcequ'il est, pour ainsi dire, presque toujours sous la main.

L'observation d'une de ces éclipses, faite en plusieurs lieux, donne tout de suite & sans aucun calcul, comme les éclipses de Lune, la différence de longitude.

Le 26 Septembre 1726, on a observé à Paris l'immersion du premier Satellite de Jupiter à $8^h\ 3'\ 20''$ du soir : la même immersion a été observée à Pekin le 27 à $3^h\ 39'\ 2''$ du matin : on comptoit donc au même instant $7^h\ 35'\ 42''$ de plus à Pekin qu'à Paris. Ces

éclipses étant très fréquentes, si on les observe assidument, on pourra en avoir un grand nombre dont les correspondantes produiront différens résultats, parcequ'il est impossible qu'il n'y ait quelque erreur sur l'observation ; & le milieu pris entre tous ces résultats donnera fort exactement la différence cherchée.

Les avantages de cette méthode frapperent les Astronomes. Tous les lieux où il y avoit des Observatoires furent placés sur le globe avec exactitude : on entreprit de longs voyages pour rectifier la position des terres les plus éloignées. La Géographie, laissant les conjectures, devint une science positive, & n'employa plus les relations des Voyageurs que pour les détails : mais dépendante de l'Astronomie, c'est à cette science qu'elle doit ses progrès ; & l'Astronome, les yeux fixés sur le Ciel, guide les pas du Géographe sur la surface de la Terre.

Les observations de MM. Picard & de la Hire firent connoître que la Bretagne étoit sur les cartes de 30 lieues trop avancée dans la mer ; que la différence de latitude entre Paris & les Pyrénées étoit trop forte ; de sorte que l'on croyoit ces montagnes plus éloignées qu'elles ne le sont réellement de la capitale du Royaume. Aussi Louis XIV se plaignoit-il, en plaisantant, qu'il payoit bien son Académie pour resserrer les limites de ses possessions. MM. *Duglos*, *Varin* & *Deshayes* furent observer la position de l'isle de Gœrée qui est à la vue du Cap-Verd, & qui pouvoit servir à établir la position de cette partie da la côte d'Afrique. M *Halley* fut à l'isle de Ste Hélene : M. *de Chazelles* voyagea dans le Levant. Les Missionnaires Jésuites, admis dans un pays dont les Sciences avoient ouvert l'entrée à la Religion, se livrerent avec ardeur à la correspondance qu'on attendoit d'eux ; & les Sciences ne gagnerent pas moins à leurs travaux que la Religion. Toutes ces courses, entreprises en différentes années du dernier siecle, démontrerent que le Cap-Verd étoit plus oriental qu'on ne l'avoit cru jusqu'alors ; que le Cap de Bonne-Espérance devoit au contraire être ramené vers l'Occident de près de deux cens lieues. La Chine fut rapprochée de l'Europe d'environ six à sept cens lieues. L'Asie resserrée fut donc restreinte à ses vraies bornes ; & l'on rendit aux mers qui séparent les deux Indes, ce que l'ignorance de la Géographie avoit fait usurper sur elles.

L'utilité & l'usage des éclipses des Satellites est suffisamment prouvée par tout ce qui vient d'être dit. On rendroit un grand service à l'humanité en les appliquant à la recherche des longitudes sur mer ; mais deux difficultés s'y opposent. La premiere est celle d'observer & de suivre Jupiter avec une lunette assez longue, malgré le mouvement du vaisseau. L'invention des objectifs de M. Dollond & celle de la chaise marine de M. Irwin semblent devoir lever cette difficulté. Les objectifs composés de M. Dollond font espérer que l'on pourroit réduire les lunettes à une longueur commode pour la mer, sans leur rien faire perdre de leur force. La chaise marine de M. Irwin étoit construite de maniere qu'un Observateur n'y sentoit point les mouvemens du vaisseau : mais il ne paroît pas qu'on en fasse usage ; on n'en a plus entendu parler depuis les justes éloges accordés à une invention si utile. La seconde difficulté naît de ce que sur la mer on a besoin de connoître la longitude dans l'instant même, & que conséquemment on ne peut avoir d'observation correspondante à celle que l'on vient de faire. C'est à quoi les Astronomes ont tâché de suppléer, en s'efforçant de construire des Tables assez exactes pour qu'une éclipse calculée sous un méridien connu, ne s'éloignât que très peu de l'observation qui y auroit été faite, & pût servir de correspondante à celle qui est faite sous un méridien inconnu & cherché.

Il est certain que les observations du premier Satellite sont déja suffisamment bien représentées, en rejettant celles qui sont faites au tems de l'opposition de Jupiter, & qui sont défectueuses, parceque le Satellite sortant de l'ombre trop près du disque de Jupiter, sa lumiere est affoiblie par l'éclat de celle de la planete. On le suit plus difficilement : il disparoît plutôt, & reparoît plus tard. Mes Tables, ainsi que celles de M. Wargentin, ne s'écarteront que rarement d'une minute ; & si l'on suppose que l'erreur de l'observation & celle de l'heure vraie soient chacune d'une minute, on auroit la longitude en mer à trois minutes de tems ou à trois quarts de degré près dans les cas les plus défavorables, c'est-à dire, ceux où ces trois erreurs feroient accumulées dans le même sens. Cette méthode seroit peut-être préférable à l'usage des meilleures pendules ; ou du moins, en employant ces deux moyens, l'un serviroit à corriger l'autre : mais on ne peut

peut observer sur mer les éclipses des Satellites sans la chaise de M. Irwin, & c'est aux Marins qu'il faut demander si l'usage en est commode.

Nous allons revenir maintenant aux progrès des connoissances sur le mouvement même des Satellites. Nous avons vu que M. Cassini avoit trouvé les vraies révolutions périodiques, & les avoit corrigées de l'inégalité du mouvement de Jupiter.

C'étoit une question intéressante, de savoir si le plan dans lequel chacun des Satellites se meut, est le même que celui de l'orbite de Jupiter, ou s'il est incliné à cette orbite. La solution de cette question étoit délicate & difficile à tirer des observations grossieres qu'on faisoit avant M. Cassini. Elle échappa à ceux qui observoient mal. Plusieurs Astronomes crurent que l'orbite des Satellites étoit dans le même plan que celle de Jupiter; cependant Galilée & Borelli s'étoient apperçus qu'elle étoit inclinée. M. Cassini le démontra ensuite, & le quatrieme Satellite en donna une preuve sans réplique en cessant de s'éclipser.

Dès que deux cercles sont inclinés l'un à l'autre, ils doivent se couper en deux points. Ces deux points sont ce que les Astronomes appellent les *nœuds*. Ainsi, *NE* [*Fig. 6.*] étant l'orbite d'un Satellite, *NB* celle de Jupiter, *N* est un nœud de l'orbite d'un Satellite sur celle de Jupiter. Il est clair que si le demi-cercle *ABED* représente la section de l'ombre transportée par le mouvement de Jupiter le long de l'orbite *ND*, quand le centre *I* de Jupiter sera dans le nœud *N*, le Satellite parcourra le demi-diametre de l'ombre: mais quand Jupiter sera en *I*, à quelque distance des nœuds, le Satellite parcourra dans l'ombre la corde *DE*; & si l'angle d'inclinaison étoit plus grand, & que l'orbite fût représentée par *NG*, on voit que le Satellite passeroit au-dessus de l'ombre sans y entrer. C'est ce qui arrive au quatrieme Satellite à 50° de ses nœuds.

L'inclinaison étant bien constatée, il s'agissoit de connoître la quantité, c'est-à-dire, l'angle que formoient les deux plans. Cet angle pouvoit n'être pas le même pour les quatre Satellites; mais les différences ne furent pas assez sensibles alors pour frapper les Astronomes: elles échapperent même à Dominique Cassini, qui établit que les quatre Satellites se mouvoient dans une orbite inclinée à celle de Jupiter, & faisant avec elle un angle de 2° 55′.

Il résulte de cette inclinaison une inégalité dans la durée des éclipses. Cette durée est la plus longue, lorsque Jupiter est en *N* dans le nœud du Satellite, parcequ'alors le Satellite traverse la section de l'ombre par son diametre; mais lorsque Jupiter s'éloigne du nœud, & vient en *I*, par exemple, le Satellite ne parcourt plus qu'une corde *DE* du cercle; & comme la corde est toujours plus petite que le diametre, il doit la parcourir en moins de tems. La durée est la plus petite, lorsque Jupiter est à 90° des nœuds, parceque ce point, que l'on appelle les *limites*, est celui où l'orbite du Satellite s'éleve le plus au-dessus de celle de Jupiter. Le Satellite, entrant dans l'ombre, parcourt donc, de toutes les cordes qu'il peut parcourir, celle qui est la plus éloignée du diametre, & conséquemment la durée de l'éclipse doit être la plus petite. On voit donc par-là que la durée d'une éclipse dépend de deux choses; de l'inclinaison, d'où résulte l'élévation de l'orbite au-dessus du plan de Jupiter; & de la distance au nœud.

En établissant l'inclinaison des Satellites de 2° 55', M. Cassini trouva les quantités suivantes pour les plus grandes & les plus petites demi-durées des éclipses,

I	1h 8' 10"	1h 3' 38"
II	1 29 5	1 18 52
III	1 47 19	1 6 7
IV	2 22 56.	

Selon les Tables de Cassini, le quatrieme cessoit d'être éclipsé, lorsque Jupiter étoit à 48 degrés des nœuds. On verra par la suite combien quelques-unes de ces déterminations s'éloignent du vrai. Les vérités, dans la nature, forment une chaîne dont la premiere est difficile à saisir; il n'appartient qu'au génie de s'en emparer; toutes les autres dépendent du tems: & s'il ose assigner leurs rapports, l'erreur où il peut tomber ne doit pas faire oublier qu'il a dit aux hommes: Voilà le chemin que vous devez tenir.

Le desir d'étendre les connoissances géographiques, de rectifier même la théorie des Satellites, multiplia les observations; le tems & le grand nombre des Observateurs les accumulerent. On s'apperçut bientôt que les mouvemens de ces planetes avoient d'autres inégalités que celle qui est produite par l'inégalité du

mouvement de Jupiter. On remarqua d'abord, que toutes les immersions du premier Satellite, qui sont les seules phases qu'on puisse observer depuis la conjonction de Jupiter avec le Soleil jusqu'à l'opposition, anticipoient sur les tems calculés par les Tables, & qu'au contraire les émersions faites depuis l'opposition jusqu'à la conjonction, retardoient constamment. La cause en paroissoit difficile à trouver. Il étoit clair que l'effet dépendoit de la position de Jupiter à l'égard de la Terre. Cet effet étoit assez sensible pour ne pouvoir pas être confondu avec l'erreur de l'observation : la différence étoit de 14' à 16'. M. Cassini soupçonna le premier que la lumiere mettoit quelque tems à venir de Jupiter à nous, & que Jupiter étant plus éloigné dans les conjonctions que dans les oppositions, de tout le diametre de l'orbite terrestre, il étoit naturel que la lumiere mît plus de tems à venir jusqu'à nous; mais il se répondoit à lui-même, que, si l'on admettoit cette équation du mouvement de la lumiere pour le premier Satellite, il falloit l'admettre nécessairement pour les trois autres, parceque cette cause étoit générale, & devoit avoir les mêmes effets sur chacun d'eux. Or les observations des trois Satellites ne paroissoient pas indiquer cette équation, & détruisoient par conséquent l'explication ingénieuse qu'il avoit imaginée. M. Roemer ne pensa pas comme M. Cassini sur les objections qu'on pouvoit faire; il appuya & fit si bien valoir son sentiment, que tous les Savans adopterent le mouvement successif de la lumiere, & qu'il eut toute la gloire de la découverte, quoique M. Cassini en fût réellement l'auteur. Cependant M. Maraldi fit depuis, en 1707, une objection assez spécieuse. Il disoit : » Si » la lumiere met 15' à 16' de tems à parcourir le diametre de » l'orbe terrestre, il devroit y avoir une autre inégalité dans les » observations des Satellites, dépendante du lieu de Jupiter dans » son orbite, qui feroit retarder les éclipses depuis son périhélie [a] jusqu'à son aphélie, & qui les avanceroit, au contraire, » depuis l'aphélie jusqu'au périhélie; car, supposé que le lieu » de la Terre fût le même dans ces deux cas, la différence des

[a] Dans l'ellipse que décrit une planete autour du Soleil, le grand axe est nommé par les Astronomes la *ligne des apsides*. Dans la *Fig.* 3, *A B* est la ligne des apsides, & le point *B*, qui est de tous les points de l'ellipse le plus près du Soleil placé au foyer *F*, s'appelle le *périhélie* : le point *A*, qui est le plus éloigné, s'appelle l'*aphélie*.

» distances de Jupirer à la Terre seroit double de son excentricité, » & à-peu-près la moitié de la distance de la Terre au Soleil «. Cette seconde équation devroit donc être environ le quart de la premiere, c'est-à-dire, de 4', & par conséquent assez sensible pour être apperçue.

On a reconnu depuis, que cette équation, imaginée par M. Maraldi, étoit indiquée par les observations mêmes du premier Satellite; que les deux équations de la lumiere devoient également être employées pour les autres, & que, si les observations n'en démontroient pas aussi clairement la nécessité, c'est que les trois derniers Satellites étoient soumis à des inégalités inconnues, qui se compliquoient avec celles-ci, & les rendoient plus difficiles à démêler. Toutes les Tables publiées par M. Maraldi, le neveu, & M. Wargentin, sont fondées sur cette hypothese, & sont les meilleures que nous ayons eues jusqu'ici.

La vérité de cette hypothese a été portée jusqu'à la démonstration par la découverte que M. Bradley a faite de l'aberration des étoiles. Nous ne nous étendrons point ici sur cet objet : nous dirons seulement que l'aberration ne peut avoir d'autre cause que le mouvement successif de la lumiere, & que deux phénomenes absolument différens, expliqués par la même cause, prouvent l'existence de cette cause. Il est donc démontré aujourd'hui que la lumiere emploie environ 8' à venir du Soleil jusqu'à nous. Ces découvertes sublimes étonnent l'esprit humain, & passent son espérance! Qui osera fixer les bornes où il sera forcé de s'arrêter? La lumiere est un fluide si subtil, qu'il frappe l'organe de la vue & se dérobe au tact. Newton la décompose; Cassini, Roemer & Bradley mesurent sa vîtesse! On croiroit que la Nature n'a point de voile que les hommes, aidés par le tems, ne puissent lever! Mais les Sciences mêmes qui nous enorgueillissent, ont des écueils où l'orgueil se brise, & qui nous ramenent à l'idée de notre foiblesse.

Du tems de Dominique Cassini, nul phénomene n'étoit mieux prouvé que le mouvement rétrograde des nœuds de la Lune : on soupçonnoit même déja le mouvement des nœuds de toutes les autres planetes. Il étoit donc intéressant d'examiner si les nœuds des Satellites étoient fixes, où s'ils avoient quelque mouvement. Galilée & Borelli avoient trouvé qu'ils devoient être placés dans

les signes du Cancer & du Capricorne : M. Cassini, cinquante ans après, se convainquit par ses observations, qu'ils devoient être dans le quatorze ou quinzieme degré du Lion & du Verseau. Ils paroissoient donc avoir avancé d'un signe environ. Mais, après trente-sept ans d'observations, M. Cassini retrouva encore les nœuds des Satellites au même degré de l'orbite de Jupiter. Or, s'ils avoient eu en cinquante ans un mouvement de 30°, il n'étoit pas possible que ce mouvement eût été insensible en trente-sept ans. Il en conclut que les observations de Galilée n'étoient pas assez précises pour constater ce mouvement très difficile à déterminer, & il établit que ces nœuds n'avoient point de mouvement propre, ou du moins qu'il étoit insensible jusqu'alors. Il n'est pas étonnant que M. Cassini ait pensé ainsi, puisque les Astronomes ont trouvé constamment les nœuds du premier & du second à la même place [a] jusqu'en 1765, c'est-à-dire, après cent ans d'observations exactes.

On continua d'observer les Satellites de Jupiter assiduement : M. Maraldi, neveu de M. Cassini, venu en France avec lui, s'y livra tout entier. Il apperçut, en 1714, une tache sur le disque du quatrieme Satellite. Il le vit un soir prêt d'entrer sur le disque de Jupiter ; car à chaque révolurion les Sarellires doivent passer devant cette planete ; & lorsque Jupiter est à-peu-près dans les nœuds, ils passent sur son disque même, & y produisent une éclipse de Soleil, comme fait la Lune lorsqu'elle se trouve entre le Soleil & nous.

Dès que le Satellite est entré sur le disque de Jupiter, il ne doit plus être visible, par la raison que la face éclairée du Satellite ne peut se détacher sur un fond éclairé, comme le disque de Jupiter ; il n'y a que l'ombre qu'il y jette, qui puisse nous rendre son passage sensible. Le Satellite *G* [*Fig.* 7.], éclairé par le Soleil *S*, jette une ombre *O* sur Jupiter *AB*. La Terre est en *T*, par qui le Satellite seroit vu en *L*, s'il pouvoit l'être : mais elle peut très bien appercevoir son ombre en *O*. M. Maraldi, après que le Satellite fut entré, vit sur le disque de Jupirer une tache noire & ronde qui n'y étoit pas auparavant, & qui parois-

[a] Il n'est pas inutile de remarquer ici que les nœuds de ces quatre orbites paroissoient être au même point de l'orbite de Jupiter, ou du moins très près les uns des autres.

foit au lieu où le Satellite devoit être. Il se convainquit par le calcul, que cette tache ne pouvoit pas être l'ombre du Satellite : il observa que cette tache avoit le même mouvement que devoit avoir le Satellite : enfin, quelque tems après, il apperçut entrer sur le disque la véritable ombre du Satellite ; ce qui prouva évidemment que la premiere tache qu'il avoit vue, étoit sur le disque du Satellite même.

M. Maraldi remarque [a] que cette observation n'est pas la premiere, & que M. Cassini en avoit fait deux, l'une en 1665, & l'autre en 1677. Il avoit même remarqué, le 28 Août 1665, une tache sur le troisieme Satellite. Rien n'est donc mieux constaté que l'existence de ces taches. Cette observation est confirmée par les apparences des Satellites mêmes, qui semblent quelquefois plus petits, & quelquefois plus gros.

Le 12 Août 1711 [b], M. Bianchini vit à Rome le quatrieme Satellite qui, étant à l'Orient de cet astre, éloigné de son centre de trois de ses diametres, étoit fort petit, & d'une lumiere très foible. Depuis 8^h 30' jusqu'à 9^h 34' le Satellite parut si petit, qu'on avoit peine à l'appercevoir : cependant on calcula si le Satellite n'avoit pas pu raser le bord de l'ombre. Par une observation faite à Paris le 26 Juillet précédent, c'est-à-dire, précisément dans l'intervalle d'une révolution, on trouva que la conjonction avoit dû arriver le 12 Août à deux heures après midi ; & par conséquent n'avoit pas été visible en Europe.

Il n'y a d'autre maniere d'expliquer ce phénomene, que par les taches découvertes par MM. Cassini & Maraldi. Si l'on suppose de plus ce que l'analogie nous porte à croire, c'est-à-dire que ces petites planetes ont, comme les autres, un mouvement de rotation sur leur axe, dans le tems où les taches se trouveront de notre côté, l'apparence du Satellite sera fort diminuée ; si ces taches sont très grandes, il pourra paroître très petit.

Les Satellites sont des points lumineux plus ou moins gros. Les plus fortes lunettes n'ont jamais pu faire appercevoir la rondeur de leur disque, ni la forme de croissant qu'ils doivent prendre en entrant dans l'ombre, comme on l'observe quand la Lune commence à s'éclipser. Cependant la sagacité humaine a vu ce

[a] Mémoires de l'Académie 1714. [b] *Ibid.* 1711.

que les yeux ne peuvent voir : elle a découvert que ces disques insensibles à la vue avoient un mouvement de rotation, comme la Terre, & des taches, comme Jupiter. La raison étend l'empire des sens, & leur démontre ce qu'ils ne peuvent appercevoir.

A mesure que les observations se multiplioient, & que l'habitude d'observer les rendoit meilleures, on rectifioit les élémens des Tables, & on commençoit à soupçonner de nouvelles inégalités. Le premier Satellite a été long-tems le seul dont les observations fussent assez bien représentées par les Tables. M. Bradley publia en 1719 celles qu'il avoit construites pour les quatre Satellites, dans l'édition qu'il fit des Tables des planetes de Halley : il y ajouta les Tables du premier, de Pound, son compatriote.

M. Bradley, l'un des plus grands Astronomes de ce siecle, célebre sur-tout par la découverte de la nutation de l'axe de la Terre, apperçut la plupart des inégalités des Satellites qui ont été reconnues depuis.

Il avoit déterminé leurs moyens mouvemens par d'anciennes observations, comparées à celles qu'il fit à Wansted, après quatre révolutions de Jupiter ; il vit que les trois Satellites intérieurs avoient des inégalités très sensibles, mais que celles du second surpassoient de beaucoup celles du premier. Ces inégalités paroissoient croître assez vîte. Il ne crut pas qu'elles pussent dépendre de l'excentricité de leur orbite, & il jugea, avec raison, qu'elles devoient être attribuées à l'action mutuelle des Satellites les uns sur les autres. La période de ces erreurs lui sembla être de 437 jours. Pendant ce tems, le second Satellite acheve cent vingt-trois révolutions, & les trois Satellites intérieurs se retrouvent dans la même position, soit entr'eux, soit à l'égard de l'axe de l'ombre de Jupiter. La période que suivent ces inégalités, étoit une preuve sans réplique de la gravitation des Satellites ; mais, quoiqu'on en connût la cause, il étoit impossible de déduire la loi qu'elles devoient suivre, de la loi de la gravitation universelle. Newton n'étoit plus, & les Géometres modernes n'avoient pas encore percé les ténebres qu'il avoit laissées sur la route qui l'avoit conduit à ses découvertes sublimes.

M. Bradley découvrit en même tems, que le quatrieme Satellite avoit une équation du centre à-peu-près égale à celle de

Vénus, c'est-à-dire, d'environ 48′ de degré : il fixa même l'époque de l'apojove [a] & son mouvement.

On voit par ce détail combien de sources d'erreur furent indiquées par M. Bradley. Il succéda à M. Cassini ; &, après ce grand homme, ce fut à lui que l'astronomie des Satellites dut ses nouveaux progrès.

Pour suivre l'ordre des matieres, plutôt que celui des tems, nous passerons aux travaux de MM. Maraldi & Wargentin, tous deux réunissant l'art de bien observer à celui de tirer un grand parti des observations. C'est dans leurs mains que la théorie des Satellites va atteindre à une sorte de perfection ; & il ne falloit pas moins de sagacité pour débrouiller un pareil cahos.

M. Maraldi, neveu de celui dont nous avons parlé plus haut, actuellement Membre de l'Académie Royale des Sciences, s'empara de la théorie du quatrieme Satellite. Il donna, en 1732, un excellent Mémoire, dans lequel il fait voir que ce Satellite a une équation du centre d'environ 55′. M. Maraldi, dans un autre Mémoire donné récemment [b], a corrigé quelques-unes de ces déterminations, & est parvenu à représenter très bien les observations.

M. Wargentin adopta les idées de M. Bradley sur les inégalités des Satellites, produites par leur attraction mutuelle, & faute de connoître la loi qu'elles suivoient. Il essaya de la découvrir par les observations : il y réussit pleinement ; & dans les Tables qu'il mit au jour en 1746 & 1759, il donna au premier Satellite une petite équation de 3′ ½ de tems, & au second une équation de 16′ ½. La période de ces deux équations est de 437 jours. On les nomme *empyriques*, parcequ'elles sont fondées sur la connoissance des effets, plutôt que sur celle des causes.

Les mouvemens du premier Satellite furent représentés par ces Tables avec une telle exactitude, que l'instant d'une éclipse s'écartoit du calcul rarement de deux minutes, & le plus souvent de moins d'une minute.

Quant à ceux du second, la précision ne pouvoit pas être la même, par une raison qu'on apprendra par la suite : mais, quoique

[a] Nous appellons ici apojove d'un Satellite à l'égard de Jupiter, le point que l'on nomme aphélie à l'égard du Soleil.

[b] En 1760.

quoique le calcul des éclipſes s'éloigne encore de l'obſervation, dans quelques cas défavorables, de 7′ à 8′, ces Tables étoient les meilleures qu'on eût encore publiées; & il eſt étonnant que l'on ait pu diſcerner dans les phénomenes ce qui eſt dû à chacune des cauſes compliquées qui les produiſent.

M. Wargentin donna au troiſieme une équation de 8′, dont la période eſt de douze ans & demi; & au quatrieme une de 1ʰ 4′, dont la période eſt d'un peu plus de douze ans. Il eſt viſible que ces deux équations dépendent de l'excentricité, & ſont réelement deux équations du centre, propres à chacun de ſes Satellites. Leurs périodes ſuppoſent un mouvement dans l'apſide; car, ſi cette ligne étoit immobile, la période [a] de l'équation ſeroit celle de la révolution de Jupiter.

M. Maraldi s'eſt occupé auſſi de la théorie du ſecond & du troiſieme Satellites: il a vu la néceſſité d'employer les équations que M. Wargentin a introduites; mais ſes Tables n'étant pas ſuffiſamment perfectionnées, il ne les a pas encore données au Public. Ses recherches ſont conſignées dans les Mémoires de l'Académie.

Un phénomene plus ſingulier que les inégalités des mouvemens des Satellites, fut apperçu, dès 1727, par M. Maraldi, l'oncle; c'eſt la variation de l'inclinaiſon de leurs orbites. Il remarqua que les demi-durées des éclipſes n'étoient pas toujours les mêmes à égales diſtances des nœuds. Or, on a vu que les demi-durées des éclipſes ne dépendoient que de l'inclinaiſon & de la diſtance au nœud: ſi la diſtance au nœud eſt la même dans deux années différentes, & que la demi-durée ſoit plus grande ou plus petite dans l'une que dans l'autre, il faut que l'inclinaiſon ait changé. C'étoient les obſervations du premier Satellite qui avoient fait ſoupçonner à M. Maraldi cette variation; il la confirma d'une maniere convaincante, en 1729, par les obſervations du ſecond

[a] Soit, par exemple [*Fig.* 8.], le Soleil en *S*, les apſides du Satellite en *L* & *H*. Jupiter étant en *I*, eſt vu du Soleil dans les apſides du Satellite: par conſéquent le Satellite, à l'inſtant de ſa conjonction, ſe trouve dans les apſides, & l'équation du centre eſt nulle dans ce point, comme on le ſait. Au bout de 11 ans & 10 mois, Jupiter, parti de *I*, eſt revenu en *I*: & l'équation du centre ſeroit encore nulle, ſi l'apſide n'avoit pas de mouvement; mais ce mouvement l'a tranſportée de *L* en *G*; il faut donc que Jupiter parcoure l'arc *IK* de plus que le cercle entier de ſa révolution. Et voilà pourquoi la révolution de l'équation du centre d'un Satellite eſt plus longue que celle de Jupiter.

Satellite. Nous n'en citerons que les exemples extrêmes. Le 21 Janvier 1668, Jupiter étant très près des *limites*, c'est-à-dire, du lieu où les demi-durées doivent être les plus courtes, on observa, le même jour [a], l'immersion & l'émersion du second Satellite, & on trouva la demi-durée de l'éclipse de $1^h\ 19'$. Le 17 Septembre 1715, Jupiter étant presque dans les limites, on ne trouva plus cette demi-durée que de $1^h\ 7'\ 14''$. Voilà une différence de 12' de tems, qu'il est impossible d'attribuer à l'erreur des observations. D'ailleurs plusieurs autres observations montroient des différences qui, quoique moins sensibles, étoient encore démonstratives.

Il remarque, avec vérité, qu'il n'y a que trois manieres d'expliquer ces différences; 1°. en supposant un mouvement dans les nœuds; 2°. en supposant une excentricité à l'orbe du Satellite; 3°. en supposant une variation dans l'inclinaison. Dans le premier cas, lorsque Jupiter revient au même point de son orbite, il ne seroit plus à la même distance des nœuds, puisque les nœuds ne seroient plus au même lieu : mais les mêmes observations qui faisoient voir l'inégalité des demi-durées, prouvoient souvent aussi que les nœuds n'avoient point changé de place; il n'y avoit donc pas moyen d'imaginer qu'ils eussent aucun mouvement.

Dans le second cas, l'excentricité de l'orbite du Satellite augmenteroit ou diminueroit sa distance à Jupiter; il seroit tantôt plus éloigné, tantôt plus près, & le tems de son passage par l'ombre plus long ou plus court, selon qu'il traverseroit une partie plus étroite ou plus large de cette ombre conique. Mais il est aisé de reconnoître par le calcul, qu'il faudroit une excentricité très considérable pour rendre raison de ces différences, & qu'elle ne conviendroit pas aux autres observations.

Il ne restoit donc que la variation de l'inclinaison, seule cause à laquelle il fût possible de les attribuer; mais cette variation étoit elle-même un phénomene inconcevable; car, en admettant la gravitation mutuelle des Satellites, on conçoit que l'attraction du Satellite L [*Fig.* 9.] puisse élever l'orbite AN du Satellite A, & diminuer par conséquent l'angle d'inclinaison LNA.

[a] Ces observations où l'on peut voir les deux phases d'une éclipse du second Satellite sont très rares : il n'y en a encore que onze exemples depuis cent ans.

Mais, en supposant que les effets de cette attraction soient assez considérables pour que le plan *A N* atteigne le plan *L N*, & s'y confonde, la cause doit cesser alors, car le corps *A* ne peut être sollicité ni à monter ni à descendre. Or, si le plan *A N* continue de s'élever jusqu'en *B N*, quelle sera la cause qui l'y portera? Or c'est ce qui arrive au plan du second Satellite : il s'éleve au-dessus du plan le plus élevé des trois autres, de près de 30′.

M. Wargentin ayant rassemblé un grand nombre d'observations, y appliqua ses recherches ingénieuses. Il vit qu'on ne pouvoit pas douter de cette variation de l'inclinaison, qui croît depuis 2° 29′ jusqu'à 3° 48′ environ en quinze années & demie, & décroît pendant quinze autres années & demie, pour revenir à 2° 29′ : de sorte que la période de cette variation est de 31 ans.

Au moyen de cette hypothese, M. Wargentin parvint à représenter assez bien les observations, beaucoup mieux même qu'on n'eût pu l'espérer; car il y a ici deux sources d'erreur. La premiere est celle qui naît des équations propres aux mouvemens du Satellite, qui ne pouvoient avoir été appréciées qu'à-peu-près, & dont la marche n'étoit pas bien connue. La seconde est produite par l'incertitude des demi-durées établies sur une hypothese. Il n'est pas impossible sans doute de fixer le tems de la plus grande & de la plus petite inclinaison, & de connoître par-là la durée de la période de ses variations; mais la regle pour distribuer les progrès de ces variations dans les différentes années dépend d'une hypothese qu'il faut imaginer. M. Wargentin a eu assez de génie pour ne pas s'éloigner beaucoup de la vérité.

Les Satellites sont les *Lunes* de Jupiter, & la Lune est le Satellite de la Terre; il doit donc y avoir beaucoup d'analogie entre la Lune & les Satellites. Cependant les nœuds de la Lune ont un mouvement rétrograde assez considérable, & la variation de son inclinaison est assez petite; les nœuds des Satellites paroissent immobiles, & la variation de plusieurs de leurs inclinaisons est très grande.

La loi simple de la Nature, à laquelle toutes les planetes obéissent, qui regle la Lune dans sa marche inégale, ne suffit-elle pas dans le systême de Jupiter? Faut-il changer les loix de l'attraction universelle? ou bien ces loix sont-elles cachées en effet sous des phénomenes qui ne leur sont contraires qu'en

apparence, & qui dépendent réellement de la cause commune?

M. Maraldi, le neveu, avoit soupçonné, en 1732, que l'inclinaison du troisieme étoit variable, comme celle du second: l'analogie portoit à le croire, & les observations le lui ont démontré depuis. Il résulte de ses recherches, que l'inclinaison du troisieme a diminué constamment depuis 1661, époque des observations exactes, jusqu'en 1697; qu'ayant cessé de diminuer, elle a commencé à augmenter, & n'a pas cessé jusqu'aujourd'hui. Nous n'avons donc pas encore les points extrêmes de cette variation, & la période en est encore inconnue. M. Maraldi, dans des Tables manuscrites qu'il m'a communiquées, avoit si bien déduit des observations les diminutions & les accroissemens de l'inclinaison, que ceux que j'ai tirés aujourd'hui de la théorie ne s'en écartent que très peu.

M. de Fontenelle disoit, en 1732, après avoir rendu compte du travail de M. Maraldi sur la variation de l'inclinaison du troisieme Satellite: » Tout ceci commence à vérifier ce que nous » avions annoncé &, en quelque sorte, prédit en 1727, que les » hypotheses de la concentricité des orbes des Satellites, de » l'immobilité de leurs nœuds, de la constance de leur inclinai- » son, pourroient bien ne pas subsister. Elles n'étoient pas assez » physiques, & ce n'est pas là la sorte de régularité que la Nature » affecte. Voilà déja la constance des inclinaisons ébranlée dans » les trois premiers Satellites, la concentricité dans le quatrieme: » l'immobilité des nœuds tient bon jusqu'à présent; mais il y a » bien de l'apparence qu'à la fin tout aura le même sort.

C'est ainsi que le génie franchit l'intervalle des tems, & voit dans l'ordre des choses possibles, les phénomenes que l'avenir doit nous dévoiler.

En effet, M. Maraldi découvrit, en 1758, que les nœuds du troisieme & du quatrieme avoient un mouvement: mais ce mouvement, qui est assez lent, est direct, & ce phénomene répugne aux loix connues du systême du Monde. Dans les principes de la gravitation, le mouvement des nœuds se fait toujours en sens contraire de celui de la planete: ainsi, à l'exception de quelques cometes dont le mouvement est contre l'ordre des signes du zodiaque, les nœuds de toutes les planetes doivent être rétrogrades.

M. de la Lande a fait voir, en 1758, que l'attraction des trois Satellites intérieurs devoit donner aux nœuds du quatrieme un mouvement direct sur l'écliptique de Jupiter. Cette remarque utile & curieuse prouva que le systême de l'attraction expliquoit même les phénomenes qu'on lui avoit cru contraires, & donna l'espérance de découvrir la cause des variations de l'inclinaison : mais cette découverte tenoit à la détermination des perturbations, & à la connoissance des masses.

Avant de toucher à cette partie de l'Histoire des Satellites, il faut revenir à quelques objets dont nous devons rendre compte.

MM. Maraldi & Whiston ont essayé d'apprécier leur diametre; mais on ne doit espérer là-dessus que des à-peu-près. Les Satellites sont trop petits pour être apperçus à la vue simple, à cause de l'éclat de Jupiter : les lunettes nous les font voir comme des étoiles de la sixieme grandeur : aucune jusqu'à présent n'a pu faire distinguer leur disque ; le micrometre ne peut donc mesurer ce disque encore insensible. M. Maraldi employa, en 1734, le tems que les Satellites mettent à entrer sur le disque de Jupiter, pour calculer leur grandeur apparente : il trouva que le diametre du troisieme Satellite étoit environ un dix-huitieme de celui de Jupiter, & le diametre des trois autres un vingtieme. Ainsi leurs diametres sont environ la moitié de celui de la Terre. M. Whiston les a trouvé fort différens, en les déduisant du tems que le Satellite paroît employer pour entrer dans l'ombre. Le troisieme Satellite est, selon lui, le plus gros, & est à peu-près de la grosseur de la Terre. Le premier est celui qui l'est le plus après le troisieme : il le juge un peu plus gros que Mars. Le second Satellite est plus petit que le premier, & peut être comparé à Mercure. Enfin le quatrieme est le plus petit de tous, & n'est gueres plus grand que la Lune.

Mais de ce que les Satellites ont un diametre, il s'ensuit qu'en se plongeant dans l'ombre, leur lumiere doit diminuer par degrés, & qu'ils doivent disparoître pour nous, avant que d'être éclipsés entiérement ; c'est-à-dire qu'ils cessent d'être visibles lorsque la partie éclairée de leur disque n'est plus assez grande pour faire une impression sensible sur la rétine. Mais cette partie éclairée, que nous n'appercevons plus alors, seroit visible encore si nous étions plus près des Satellites. Ils doivent donc disparoître

plutôt ou plus tard, selon que la Terre se trouve plus loin ou plus près d'eux. Il résulte de là, dans leurs éclipses, une inégalité optique, qui a été indiquée [a] par M de Fouchy. Cette inégalité doit produire des différences très sensibles sur le tems des éclipses qui arrivent près de la conjonction de Jupiter avec le Soleil, comparées à celles qui arrivent près de l'opposition, parceque dans ce dernier cas la Terre est plus près de Jupiter de tout le diametre de l'orbe terrestre.

On n'a point encore fait usage de cette inégalité, faute de pouvoir fixer la quantité de ses effets: mais il est nécessaire de la connoître; & c'est peut-être de ce seul élément que va dépendre à l'avenir la perfection de la théorie des Satellites.

Les observations des Satellites, devenues plus exactes entre les mains d'Observateurs exercés par une longue habitude, firent appercevoir les erreurs que produit la différence des vues & des lunettes. Deux Observateurs ont deux lunettes de longueur inégale: celui qui a la plus longue voit l'immersion plus tard & l'émersion plutôt. Deux Observateurs, dont l'un est myope & l'autre presbyte, ne voient point l'immersion ni l'émersion en même tems. Ces deux sources d'erreur me paroissent difficiles à connoître, & la recherche en est très délicate, parcequ'elles se compliquent nécessairement. Je ne puis pas essayer de déterminer l'effet de la longueur des lunettes, que celui de la différence de ma vue avec celle de mon associé n'y entre pour quelque chose: en choisissant deux lunettes de même longueur, & cherchant à tirer de l'observation la différence de ma vue avec celle de l'Observateur qui est de concert avec moi, nos lunettes, quoique de même longueur, n'ont presque jamais la même excellence; & l'effet que cela peut produire dans les résultats est inconnu. Il me semble qu'on doit tâcher d'apprécier à-peu-près ces deux erreurs, en choisissant pour la premiere, les vues dont la force est à-peu-près la même, & pour la seconde, des lunettes de mêmes longueurs, & dont l'excellence ait été reconnue égale, & constatée par des expériences répétées. Ces effets, une fois appréciés, seront corrigés l'un par l'autre, &, en réitérant les expériences, pourront être alors connus indé-

[a] Mémoires de l'Académie 1732.

pendamment l'un de l'autre. Je ne sache pas qu'on en ait fait encore de relatives à ces deux objets, qui en valent assurément bien la peine; car la théorie des Satellites, quelque perfectionnée qu'elle fût d'ailleurs, sera toujours défectueuse à cet égard.

Le Pere Hell, Astronome de Leurs Majestés Impériales & Royales, paroît s'en être occupé : mais il me semble que la meilleure maniere d'établir quelque chose de certain à cet égard, est que deux ou plusienrs Observateurs dans un même lieu, avec des lunettes de différentes & d'égales longueurs, d'une force éprouvée & connue, fassent un grand nombre d'observations d'immersions du premier Satellite.

La différence de l'effet des lunettes d'inégale longueur a été remarquée dans la détermination des longitudes. On s'est apperçu que, parmi un assez grand nombre d'observations faites dans deux lieux différens, mais toutes par les mêmes Observateurs, les émersions ne donnoient pas la même différence de longitude qu'avoient donné les immersions. En effet, à Greenwich on observe les éclipses des Satellites plus tard qu'à Paris, de 9′ 16″: mais si je me sers à Paris d'une lunette plus longue que celle de l'Observateur de Greenwich, je verrai l'immersion plus tard, de 16″, par exemple; & je conclurai que la différence de longitude est de 9′: si au contraire j'observe une émersion, je verrai plutôt le Satellite sortir de l'ombre, & je trouverai la différence de longitude de 9′ 32′. On voit que dans ces deux déterminations l'erreur est double de l'effet de la différence des lunettes. M. Maraldi parle de cette différence dans les Mémoires de l'Académie de 1734: il trouve, par la comparaison des immersions, la différence des méridiens 10′ 6″, &, par la comparaison des émersions, 8 43″. Le résultat moyen est 9′ 24″, à très peu près égal à celui qui a été établi depuis.

Il résulte de là que, pour avoir très exactement la longitude de deux villes, il faut avoir un certain nombre d'immersions & d'émersions faites dans ces deux villes, déduire la différence de longitude des immersions seules, & la déduire ensuite des émersions: la moyenne arithmétique entre ces deux différences de longitudes sera certainement la vraie.

Ce que nous venons d'expliquer est la méthode que le Pere

Hell propose dans la recherche des longitudes par le moyen des éclipses des Satellites de Jupiter. Il l'a employée avec succès pour déterminer la longitude de Vienne. On peut voir les conditions qu'il exige, & l'accord auquel il est parvenu, dans les Ephémérides qu'il a publiées pour 1764 & 1765.

Non seulement on tire de sa méthode une connoissance plus exacte de la longitude du lieu, mais on en déduit aussi la différence de l'effet des lunettes & des vues. Ses résultats ne donnent que la somme de ces deux effets, & il seroit important de pouvoir les séparer. Voici quelques détails dont on peut être curieux.

Le Pere Hell observe avec un télescope Newtonien de quatre pieds & demi : il s'en est servi pour terme de comparaison. Il a trouvé que le télescope Newtonien de quatre pieds & demi, dont se sert M. Messier, en differe de . . . 17″ 1/4 [a]
le télescope Grégorien de 30 pouces de M. Messier 32
lunette de 18 pieds de M. Maraldi . . . 4 1/4
lunette de 15 pieds de M. Maraldi . . . 7 3/4
lunette de Dollond de 10 pieds, M. Wargentin 44.

Ces différences sont assez considérables pour qu'on doive leur attribuer la plus grande partie des erreurs des Tables du premier Satellite. Le plus grand nombre des erreurs de mes Tables sont au-dessous d'une minute. Si la différence des lunettes peut y produire des erreurs de 30″ & plus, il est inutile de s'efforcer d'ajouter à ce degré de perfection, jusqu'à ce qu'on soit en état de calculer l'effet de cette différence, & d'en dépouiller les observations. Je ne doute point que les observations du second & même celles des deux autres ne soient aussi mieux représentées. Ce pas reste encore à faire; & il est nécessaire, puisque la perfection de la science en dépend. Il sera facile, si l'on prend l'expérience pour guide; & ce que le Pere Hell a fait, prouve ce que l'on peut faire encore.

La figure qu'on avoit attribuée à l'ombre de Jupiter, jetta dans une erreur qui subsista long-tems sans qu'on s'en apperçût. Dominique Cassini, & tous les Astronomes après lui, avoient reconnu & mesuré l'applatissement de Jupiter; mais on n'avoit

[a] Ces secondes sont les secondes de tems dont les instrumens cités font voir les immersions plus tard, & les émersions plutôt que l'instrument du Pere Hell.

pas

pas considéré l'effet qui résultoit de cet applatissement sur la figure de l'ombre, & on l'avoit toujours regardée comme un cône dont la base est circulaire. M. de la Lande a fait remarquer le premier, que, puisque le globe de Jupiter est un sphéroïde applati par les poles, il s'ensuit que la base du cône d'ombre est elliptique, & non pas circulaire. Par conséquent toutes les sections de l'ombre faites parallélement à cette base, sont aussi elliptiques.

Soit donc [*Fig.* 10.] la demi-section de l'ombre circulaire *AMB*, la vraie section elliptique *AKB*: les plus grandes demi-durées *AC*, & les plus petites *DE* se tirent de l'observation: il ne peut pas y avoir d'erreur à cet égard. Mais lorsqu'on en veut conclure l'inclinaison, l'hypothese de l'ombre circulaire écarte beaucoup de la vérité, & donne une inclinaison plus grande que la vraie. Je me flatte qu'on pourra s'en convaincre à l'aide de la Figure. Si de la plus courte demi-durée j'ai déduit le chemin *DE* du Satellite dans l'ombre supposée circulaire, je dois rapporter cette ligne en *FG*, parceque c'est la seule qui ait dans le demi-cercle la longueur demandée *DE*. Le Satellite paroîtra donc décrire une orbite plus élevée; car l'élévation au-dessus du plan *AB* de l'orbite de Jupiter est mesurée par *CG*, tandis qu'elle n'est réellement que *CE*. L'inclinaison déduite de l'hypothese de l'ombre circulaire paroîtra donc plus grande que la vraie. Je démontrerai dans la suite de cet Ouvrage, que les demi-durées n'en sont point altérées, & qu'elles sont les mêmes, calculées dans l'une & l'autre hypothese, pourvu que dans chacune on se serve de l'inclinaison déduite de la même hypothese.

Si le grand Cassini, qui fonda cette théorie, pouvoit contempler les progrès qu'elle a faits, tant d'inégalités de différens genres, inconnues alors, découvertes par des observations délicates & multipliées, il verroit de quels succès ont été payés les travaux de tant d'hommes célebres, qui ont vécu & passé depuis lui. La difficulté des sciences ressemble assez à l'obstacle que la côte oppose aux flots de la mer. Elle leur cede en leur résistant; chaque flot qu'elle repousse, surmonte & détruit une partie de l'obstacle. De même chaque âge enleve à quelques difficultés des sciences le nom d'insurmontables: &, pour n'en être point re-

buté, il ne faut que jetter les yeux sur les espaces envahis par la mer : cette conquête est due à la constance de ses efforts.

Maintenant que nous avons rendu compte des phénomenes du systême de Jupiter, c'est à la Géométrie à en dévoiler les causes.

La Géométrie est compagne & guide de l'Astronomie. Celle-ci apprend à l'autre ce qu'elle a découvert ; & l'autre, partant de ces connoissances, lui enseigne ce qu'elle doit découvrir. L'Astronomie est la science des faits : elle rassemble les matériaux que l'autre met en œuvre : elle observe les phénomenes : s'ils résultent de plusieurs causes, elle n'a que des conjectures pour les séparer. La Géométrie, fondée sur des principes surs & reconnus, suit dans leur marche les effets les plus compliqués, & remonte à leurs causes : elle assigne à chacune ce qui lui appartient ; & elle semble avoir dérobé à l'Etre suprême le secret de son ouvrage. Newton a porté la lumiere dans l'Astronomie physique : une géométrie sublime lui a fait découvrir qu'un principe simple est la source de tous les phénomenes des mouvemens célestes. Kepler, comme nous l'avons déja dit, avoit reconnu que les planetes se meuvent dans des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers, en décrivant *des aires proportionnelles au tems.* C'est la premiere de ses deux loix fameuses. De cette loi, de ce qu'un corps une fois mu dans une direction, tend toujours à se mouvoir en ligne droite, Newton conclut que les planetes étoient sollicitées par une force tendante au Soleil ; & le calcul lui découvrit que cette force agissoit en raison inverse du quarré des distances. Mais ce rapport étant le même dans chaque orbite, il falloit prouver que les forces qui font mouvoir deux planetes à différentes distances du Soleil, sont entr'elles dans la même proportion que si c'étoit la même planete arrivée successivement à ces différentes distances. C'est ce que démontra la seconde loi de Kepler, *que les tems des révolutions périodiques sont entr'eux comme la racine quarrée du cube des diametres des orbites.* On vit que ces deux loix avoient lieu également dans le systême de Jupiter & de Saturne. Il existe donc une force en raison inverse du quarré des distances, qui fait tendre les Satellites vers la planete principale ; c'est-à-dire, vers Jupiter & Saturne. La Lune est animée par une force semblable en tournant autour de

la Terre. Si le Soleil agit sur toutes les planetes ; Jupiter, Saturne & la Terre sur leurs Satellites, cette force de l'attraction paroît universelle, & il est naturel d'en conclure que tous les corps agissent les uns sur les autres, soit que l'attraction soit une propriété inhérente à la matiere, ou qu'elle lui soit étrangere. Le Soleil doit donc agir aussi sur la Lune ; il doit troubler ses mouvemens ; l'orbite qu'elle décrit n'est plus une ellipse réguliere : de là naissent toutes ses inégalités. Newton parvint à les déterminer & à les déduire de son systême. Il ne paroît pas en supprimer les démonstrations, mais il y suppose connues des choses plus difficiles que celles qu'il démontre. On soupçonne qu'il a voulu, pour n'être pas suivi, rompre tous les chemins par lesquels il avoit passé, & jetter un voile entre la postérité & lui. L'artifice ne seroit pas digne de ce grand homme, & n'est fait que pour les petits talens, qui s'aggrandissent dans l'obscurité. D'ailleurs il est clair qu'il se seroit trompé. Si le génie seul a pu ouvrir la route, le génie pouvoit encore la retrouver. Tous les Géometres, rebutés de ne pas l'entendre, se lasserent de le suivre. Le problême de déterminer l'action mutuelle des planetes les unes sur les autres, dépendoit de celui-ci : *Etant données les positions de trois corps, leurs masses & leurs vîtesses, trouver la courbe qu'ils doivent décrire en vertu de l'attraction, dont la loi est supposé suivre la raison directe des masses & l'inverse du quarré des distances.*

MM. Clairaut, d'Alembert & Euler, Géometres exercés sur les matieres les plus difficiles, étoient nés pour arracher à Newton son secret. Partis du seul principe de la gravitation, à l'aide d'une profonde géométrie, ils parvinrent, en 1747, tous les trois aux mêmes résultats ; le problême des trois corps fut résolu, du moins par approximation, car la nature du problême ne semble pas permettre qu'il le soit autrement ; la théorie de la Lune fut perfectionnée. Cet astre, jadis si rebelle, ne s'écarte aujourd'hui que très peu du chemin que ces illustres Géometres lui ont tracé. La gloire en rejaillit sur Newton : son systême, appuyé sur tous les phénomenes, en perdit presque le nom, & l'attraction fut placée à côté des loix de la Nature. Un corps qui circule autour d'un autre corps, doit, par les loix de l'attraction, décrire une des sections coniques : l'observation a fait connoître que cette section conique étoit une ellipse. Mais, si à l'action de ce corps

se joint celle d'un troisieme placé dans un plan différent, il en résultera plusieurs effets. La courbe décrite par le premier corps ne sera plus exactement une ellipse, mais seulement une courbe qui en approchera beaucoup : il y aura des inégalités dans le mouvement : l'axe de la courbe, que les Astronomes appellent la ligne des apsides, aura un mouvement progressif d'autant plus prompt, que l'action du corps perturbateur sera plus grande : les nœuds, ou les deux points où se coupent les plans des deux orbites, auront un mouvement contraire à celui du corps troublé, & par conséquent rétrograde. Ces effets, que je ne puis démontrer ici, se déduisent de la gravitation d'une maniere incontestable, & les principes en seroient faux, si ces effets n'avoient pas lieu. Voilà pourquoi le mouvement direct des nœuds du troisieme & du quatrieme Satellites parut extraordinaire. L'explication que M. de la Lande en a donnée, est simple & vraie. Les nœuds d'une planete troublée sont rétrogrades, il est vrai, mais c'est sur l'orbite de la planete perturbatrice.

Dans le systême de Jupiter, ce que nous entendons par les nœuds des Satellites, c'est l'intersection de leur orbite avec celle de Jupiter. Soit [*Fig.* 11.] *AD* l'orbite de Jupiter, *EAB* celle du Satellite perturbateur, *EC* celle du Satellite troublé ; *E* sera son nœud sur l'orbite du Satellite perturbateur, dont le mouvement est donné par la théorie ; *C* sera son nœud sur l'orbite de Jupiter, dont le mouvement est connu par l'observation. Soit maintenant *ACD*, *EAB* le sens direct du mouvement de Jupiter & du Satellite : l'orbite *EC* sera transportée le long de *AE*, & rétrogradera de *E* en *H*, mais elle paroîtra avoir avancé de *C* en *G*. Elle sera donc rétrograde sur *AE*, & directe sur *AD*, c'est-à-dire, sur l'orbite de Jupiter. M. de la Lande a fait voir en particulier, que les nœuds du troisieme & du quatrieme Satellites étoient dans le cas dont il s'agit, & que leur mouvement devoit être en effet direct.

Tel est le tableau fidele des progrès de l'Astronomie des Satellites jusqu'à nos jours. On y voit que leur orbite étoit mal connue. L'excentricité, déterminée dans celle du quatrieme, soupçonnée dans celle du troisieme, est regardée comme nulle ou insensible dans les deux autres. L'effet des attractions mutuelles, quelquefois apprécié, mais jamais démontré, paroît

inappréciable dans quelques cas. Le mouvement de l'apside & celui des nœuds ne sont connus que dans les orbites du troisieme & du quatrieme, quoiqu'ils existent dans toutes les quatre. La variation de l'inclinaison, constatée par les observations du second & du troisieme, ne peut être expliquée, & l'on ose à peine en soupçonner la cause.

J'ai dit les travaux des Géometres célebres de ce siecle, pour faire voir les ressources qu'ils m'offroient : je vais rendre compte de ce que j'ai osé entreprendre; &, sans entrer dans le détail des difficultés que j'ai rencontrées, je dirai ce que j'ai trouvé.

Puisque le Soleil trouble le mouvement de la Lune autour de la Terre, il doit altérer ceux des Satellites : l'effet doit être seulement moins sensible, parcequ'il en est plus éloigné. J'ai vu que cette cause de perturbations n'étoit pas négligeable à l'égard des mouvemens du quatrieme, & que son effet sur les autres se réduisoit à donner à leur apside & à leurs nœuds un mouvement dont j'ai tenu compte.

J'ai considéré ensuite, que le mouvement de l'apside ne résulte de l'action d'une planete perturbatrice, que parceque cette action modifie nécessairement la force centrale. Or, la figure du corps central modifie aussi la force avec laquelle il attire. Si toutes les parties dont il est composé agissent directement comme leur masse, & inversement comme le quarré de la distance, il est démontré que, lorsque la figure sera sphérique, le corps entier attirera dans cette raison; mais si la figure n'est pas sphérique, & qu'elle soit celle d'un sphéroïde applati par les poles, comme est le globe de Jupiter, la force ne sera plus exactement en raison inverse du quarré de la distance, & cette modification doit produire un mouvement dans l'apside des Satellites. Cette modification tient encore à la densité de Jupiter. Si les parties proches du centre du globe sont plus denses qu'à la surface, elles attireront avec plus de force; il est donc sensible que l'attraction du corps entier ne sera pas la même que si la densité eût été égale de la surface au centre. Mais comme la densité de Jupiter ne nous est pas connue, j'ai commencé par calculer [a] le changement de la force centrale, dû à la figure de Jupiter, en supposant la densité

[a] Mémoires de l'Académie 1763, second Mémoire.

uniforme, & le mouvement d'apside qui en résulte pour chacun des Satellites.

J'ai trouvé que ce mouvement étoit d'autant plus grand, que le Satellite étoit plus près de Jupiter : de sorte qu'en supposant l'applatissement de cette planete d'un dixieme du rayon, celui du quatrieme étoit d'environ 41′ par an, & celui du premier de plus de 130 degrés. Ces 41′, jointes à 5′ environ produites par l'action du Soleil sur le quatrieme, donnoient à son apside un mouvement de 46′, qui s'éloignoit très peu de 45′ que les observations faisoient connoître à M. Maraldi. Cet accord étoit frappant, car il est très difficile de déterminer ce mouvement par les observations à 1′ près. Je trouvois cependant singulier que ce mouvement tout entier fût dû à la figure de Jupiter & à l'action du Soleil, & que les perturbations mutuelles n'y entrassent pour rien.

J'ai passé à l'examen de ces perturbations mêmes; mais la détermination des forces avec lesquelles les Satellites agissent les uns sur les autres, exige que les masses soient données; & nous n'avions encore aucune connoissance de ces masses. Voici comme j'ai cru pouvoir parvenir à les connoître. Supposant ces masses données, au moyen des distances connues, j'aurois déduit les inégalités des Satellites du principe de l'attraction en raison directe des masses, & en raison inverse du quarré des distances. Mais quelques-unes de ces inégalités paroissent à-peu-près connues par observation : telles sont celles du second, dont l'équation empyrique de M. Wargentin représente assez bien les observations. Je me suis donc proposé le problême inverse du précédent : Etant données les inégalités d'un des Satellites de Jupiter, & ses distances relativement aux trois Satellites perturbateurs, déterminer les masses qui ont dû produire ces inégalités.

Au moyen de la solution du problême des trois corps, appliquée, avec les modifications nécessaires, au cas dont il s'agit ici, j'ai calculé les perturbations mutuelles des Satellites les uns sur les autres, en représentant la masse par une indéterminée.

Ayant obtenu ainsi l'expression des mouvemens d'un Satellite, celle du mouvement des nœuds & de l'apside, je les ai comparées à ce que les observations nous ont fait connoître jusqu'ici. M. Wargentin trouve que le premier Satellite a une équation de

$29' 30''$, dont la période eſt de 437 jours. J'ai vu que cette équation étoit produite par l'action du ſecond, & elle m'a ſervi à déterminer la maſſe de ce Satellite. M. Wargentin donne au ſecond Satellite une équation de $1^{\circ} 9' 42''$: j'ai vu qu'elle étoit produite par les actions réunies du premier & du troiſieme, & que par conſéquent elle ne pouvoit me donner l'une des maſſes que dépendante de l'autre. Cependant, en leur ſuppoſant la plus grande valeur poſſible, je me ſuis convaincu qu'elles ne pouvoient donner qu'environ le tiers du mouvement des nœnds obſervé dans la théorie du ſecond & du quatrieme, & qu'au contraire les maſſes qui auroient repréſenté le mouvement des nœuds, m'auroient donné le triple de l'équation de M. Wargentin. Je ſoupçonnai que cette équation étoit produite par celles que j'avois déduites de la théorie, & par quelques autres qui tendoient conſtamment à les diminuer, & les réduiſoient à la quantité de celle que M. Wargentin a tirée des obſervations. En effet, l'excentricité, ſi elle n'eſt pas inſenſible, produit deux équations aſſez conſidérables.

J'ai pris les quantités de l'équation de M. Wargentin, relatives à deux inſtans donnés; je les ai égalées aux perturbations que la théorie donnoit pour ces deux inſtans : ces deux équations devoient me donner la valeur des deux maſſes indéterminées ; j'ai été bien étonné d'en trouver une *imaginaire*. C'étoit une preuve démonſtrative que l'équation de M. Wargentin n'étoit pas produite par les ſeuls termes ſur leſquels j'avois fondé le calcul ; car cette équation repréſente aſſez bien les obſervations, pour que l'on ſoit ſûr que ſa quantité & la loi de ſes variations ſont aſſez bien connues. Voici le moyen que j'ai imaginé pour concilier ces contradictions. Il eſt plus que vraiſemblable que le ſecond Satellite a une excentricité, que ſon apſide a un mouvement égal au moyen mouvement de Jupiter, & que Jupiter, une fois ſuppoſé dans l'apſide du Satellite, doit s'y trouver toujours. Il réſulte de là que l'équation du centre eſt toujours nulle, que l'excentricité introduite dans le calcul des perturbations donne deux équations qui, combinées avec les autres, produiſent l'équation dont M. Wargentin s'eſt ſervi pour repréſenter les obſervations.

Ces ſuppoſitions établies, j'ai déduit les maſſes du premier &

du troisieme des mouvemens du nœud, suffisamment bien connus dans la théorie du second & du quatrieme Satellites.

A l'égard de la masse du quatrieme Satellite, je n'ai pu la déduire que par un tâtonnement, en cherchant celle qui représentoit le mieux les observations : je ne crois pas m'être éloigné beaucoup du vrai : de plus, j'ai indiqué un moyen de la corriger. Voici donc à-peu-près le rapport des masses des Satellites à celle de Jupiter.

Celle du premier comme	0,000337 à	}	
second	0,000021 à	}	1,000000.
troisieme	0,000133 à	}	
quatrieme	0,000050 à	}	

Ces masses représentent les mouvemens des Satellites, ceux de leurs nœuds, & les variations de leur inclinaison. On peut donc conclure qu'elles ne s'éloignent pas beaucoup des véritables, & que les principes de la gravitation suffisent pour expliquer les phénomenes du mouvement des Satellites de Jupiter.

A l'égard du mouvement de l'apside, comme il dépend en grande partie de la densité de Jupiter, inconnue jusqu'aujourd'hui, nous ne pouvons comparer ici la théorie à l'observation : il faut au contraire que les mouvemens d'apside observés servent à déterminer la loi des variations de la densité de Jupiter. J'ai donné les équations qui serviront à la fixer.

Le mouvement des nœuds des Satellites produit des phénomenes très singuliers. L'observation paroît d'abord contraire à la théorie. Celle-ci donne au nœud un mouvement assez considérable, & l'inclinaison peut être regardée comme constante. L'observation a fait croire jusqu'ici que quelques-uns des nœuds étoient fixes, ou que quelques autres n'ont qu'un mouvement assez lent, tandis que la variation de l'inclinaison est très sensible.

Mais il faut bien remarquer que la théorie considere le mouvement du nœud & la variation de l'inclinaison du Satellite troublé, relativement à l'orbite du Satellite perturbateur, tandis que l'observation donne le mouvement du nœud & l'inclinaison du Satellite à l'égard de l'orbite de Jupiter.

Soit [*Fig.* 14.] *AB* l'orbite de Jupiter, *ACB* l'orbite du Satellite perturbateur, *CE* celle du Satellite troublé : l'inclinaison que la théorie donne pour constante, est celle de l'orbite de

de l'un des Satellites fur l'autre, repréfentée par l'angle ACE. J'ai examiné ce qui arriveroit en fuppofant que CE rétrogradât le long de ACB, en faifant avec cette orbite l'angle ACE conftant; j'ai trouvé que pendant que le nœud C, parti du point A, parcourroit à-peu-près le quart de cercle AD, le nœud E rétrograderoit auffi fur l'orbite de Jupiter d'une quantité qui, pour le fecond Satellite, eft d'environ 10°, & que l'inclinaifon AEC de l'orbite du Satellite troublé fur celle de Jupiter diminueroit conftamment. Enfuite le nœud C parcourant l'autre quart de cercle DB, pour arriver en B, le nœud E deviendroit direct & coïncideroit en A, lorfque le nœud C feroit confondu en B, l'inclinaifon continuant de diminuer, & fa diminution totale étant d'environ 1° pour le fecond Satellite. Tandis que le nœud C parcourt l'autre demi-cercle de fa révolution, le nœud E continue d'être direct jufqu'à ce qu'il fe foit éloigné de 10° de l'autre côté du point A. Arrivé à ce terme, il redevient rétrograde, & fe confond en A, lorfque le nœud C s'y confond auffi. Pendant cette derniere demi révolution, l'inclinaifon augmente conftamment autant qu'elle avoit diminué; & lorfque la révolution du nœud C eft achevée, elle fe trouve la même que lorfque la révolution a commencé [a].

Voilà donc la caufe de cette variation de l'inclinaifon, fi bien conftatée dans le fecond Satellite, & qui cependant paroiffoit inconcevable. Il fuffit que le nœud C ait un mouvement tel que fa période foit de 30 ans: c'eft ce qui m'a prefcrit une des conditions dont j'ai fait ufage pour déterminer les maffes du fecond & du troifieme.

Ceci nous fait découvrir un mouvement très fingulier dans le nœud E; c'eft cette efpece de libration par laquelle il s'éloigne & s'approche du nœud A dans les deux fens. Ayant effayé de repréfenter les obfervations du fecond Satellite par cette variation de l'inclinaifon, dont le calcul m'a donné la loi, & par ce mouvement du nœud, tantôt direct & tantôt rétrograde, j'ai trouvé un accord très fatisfaifant.

M. Maraldi, à qui je n'avois pas encore communiqué cette idée, me dit, au mois de Mars 1765, qu'en examinant les

[a] Mémoires de l'Académie 1765.

obſervations du ſecond Satellite, il avoit trouvé que ſes nœuds avoient un mouvement de libration d'environ 10° autour du point où on les avoit toujours cru fixes, c'eſt-à-dire, autour du quinzieme degré du Lion & du Verſeau.

Ceci explique aſſez bien pourquoi les nœuds ont paru fixes dans ces points de l'écliptique de Jupiter. Les tems où la variation de l'inclinaiſon étoit le mieux conſtatée, ſont ceux où cette inclinaiſon eſt la plus grande, ou la plus petite : or, il ſuit de ce que nous venons de dire, qu'alors le nœud étoit réellement dans le céntre de ſa libration. Hors de ces deux points extrêmes, on pouvoit croire que, ſi les obſervations n'étoient pas mieux repréſentées, c'eſt que la loi des variations de l'inclinaiſon étoit mal connue. Je ne doute point qu'on n'ait apperçu quelquefois que le nœud auroit mieux ſatisfait aux obſervations, s'il avoit été avancé ou reculé; mais ce mouvement, dans lequel il n'y avoit aucune uniformité, tantôt direct & tantôt rétrograde, paroiſſoit ſi contraire aux loix du ſyſtême du Monde & à la marche de ſes phénomenes, que perſonne, avant M. Maraldi & moi, n'en avoit oſé parler.

Cette libration du nœud n'eſt point particuliere à la théorie du ſecond Satellite : elle a lieu pour les trois autres; & l'orbite du premier eſt le pivot ſur lequel roulent les variations de leurs nœuds & de leurs inclinaiſons.

Le nœud du ſecond a autour du nœud du premier un mouvement de libration de 10°. Le plan de ſon orbite s'éleve ou s'abaiſſe de 30′ au-deſſus ou au-deſſous du plan de l'orbite du premier dans une période de 30 ans.

Les variations de l'orbite du troiſieme ſont très difficiles à déterminer, par deux raiſons: la premiere, c'eſt que la période de ces variations n'eſt pas achevée, & que nous n'en connoiſſons pas la durée : la ſeconde, c'eſt que les perturbations du ſecond y cauſent des altérations très conſidérables, qui compliquent les effets. Cependant, en ſuppoſant avec M. Maraldi, que l'inclinaiſon a été la plus petite en 1697, je trouve que le nœud du troiſieme a un mouvement de libration autour du nœud du premier, de 3° 53′, dont la période m'a paru devoir être de 200 ans, & que l'inclinaiſon, qui étoit plus petite que celle du premier, en

1697, de 12′ 30″, sera la plus grande en 1797. Les accroissemens de cette inclinaison dépendront & des 12′ 30″ dont elle doit surpasser celle du premier en 1797, & des variations que les perturbations du second y auront produites : je trouve qu'elle doit être environ de 3° 36′. On sent avec quelles restrictions je fais la prédiction de la durée de cette période, & du terme où l'inclinaison sera la plus grande : les élémens sont si incertains à cet égard, que l'on me pardonnera s'il arrive que je me sois trompé sur quelqu'une de ces déterminations. Les observations nous apprendront si mes conjectures ont été justes, ou si l'on doit les rectifier.

Le nœud du quatrieme a encore un mouvement de libration autour du nœud du premier, d'environ 12 à 13°, & dont la période est de 400 à 500 ans.

Les variations de l'inclinaison du premier sont contraires à celles de l'inclinaison du second ; c'est-à-dire que celle-ci est la plus petite, lorsque l'autre est la plus grande. Son nœud ascendant, dont j'ai fixé le lieu moyen dans le quatorzieme degré du Verseau, a lui-même un mouvement de libration autour de ce point, d'environ 18′, dont la période est de 30 ans, tandis que le lieu moyen rétrogradera constamment sur l'orbite de Jupiter d'une quantité donnée par la théorie. Mais je n'ai pu finir, avant l'impression de cet Ouvrage, les calculs nécessaires pour la déterminer.

Tous les nœuds des Satellites oscillent donc autour du lieu du nœud du premier, ou, pour mieux dire, autour de son lieu moyen, puisqu'il oscille lui-même autour de ce point. Ce phénomene a dû arriver jusqu'ici à-peu-près dans le même degré de l'écliptique de Jupiter : mais comme le lieu moyen du nœud du premier a un mouvement rétrograde sur cette orbite, il parcourra l'écliptique de Jupiter, & transportera dans tous ses points le phénomene de la libration.

Tels sont les phénomenes singuliers que le systême de Jupiter nous présente. Quelle que soit la multiplicité des phénomenes du mouvement des astres, une loi simple suffit pour les expliquer. Qui oseroit aujourd'hui combattre les principes de Newton, annoncés avec des restrictions si sages, & justifiés par la Nature

elle-même? Newton, porté dans les spheres célestes, est au-dessus de l'envie; il n'y que l'admiration qui puisse aller jusqu'à lui! Peut-être ne saurons-nous jamais ce que c'est que l'attraction, ou si l'attraction elle-même est une cause ou un effet. Je sens que le méchanisme de son action est inconcevable! On ne peut dire par quel ressort deux corps que sépare une très grande distance, agissent l'un sur l'autre. Mais seroit-ce le premier mystere de la Nature que nous n'aurions pu pénétrer? En l'admettant comme propriété de la matiere, la simplicité de la cause rend la variété des effets plus admirable encore! Quoi de plus magnifique que cette idée? Toutes tes parties s'attireront réciproquement, a dit l'Etre Suprême à la matiere; & lui donnant une premiere impulsion, tous les astres, dispersés & lancés de la main de Dieu dans l'infinité des espaces de l'Univers, pesent les uns sur les autres, & se soutiennent mutuellement au milieu du vuide. Leurs actions s'unissent, se combattent, se détruisent: les plus petits cedent à la loi du plus fort. Le systême de l'Univers se subdivise; chaque Soleil a le sien. Les planetes même, obéissant à une force supérieure, trouvent des corps plus foibles qu'elles, qui sont forcés de les suivre dans leur route. Elles décrivent des courbes assez régulieres: les dérangemens qu'elles éprouvent, sont périodiques & réglés; l'ordre & l'irrégularité naissent du même principe. L'attraction que Dieu a mise dans la matiere, tend à réunir tous les corps en un seul: l'impulsion primitive qu'il leur donna, tend à les écarter pour jamais. Ces deux causes combinées maintiennent leurs distances réciproques, & tout se conserve par ce qui devoit tout détruire.

J'ai essayé de tracer ici les progrès de l'Astronomie des Satellites: les moyens de perfection consistent maintenant à établir chacun des élémens avec précision, à déterminer les inégalités, démêlées les unes des autres, chacune avec plus d'exactitude, pour s'en servir à corriger les masses, afin de déduire mieux les inégalités des masses corrigées. Ces opérations répétées demandoient plus de tems qu'il ne m'en étoit resté: d'ailleurs il y a des phénomenes, tel que la période des variations de l'inclinaison du troisieme, sur lesquels il faut que l'avenir nous éclaire. L'Académie a proposé pour le sujet du Prix de l'année 1766, la

théorie des Satellites de Jupiter. De grands Géometres traiteront cette matiere importante ; leurs lumieres donneront plus d'évidence à leurs démonstrations ; ils trouveront des méthodes plus directes & plus élégantes : mais si je ne me suis pas trompé sur les causes, si j'ai réussi à en calculer les effets, si les Tables que je présente au Public peuvent être utiles ; je serai assez récompensé de mes travaux ; content d'avoir dit avant eux ce qu'ils doivent dire beaucoup mieux. On me pardonnera de les avoir devancés, car il y auroit eu de la présomption à les attendre.



EXTRAIT
DES REGISTRES
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 25 Janvier 1766.

MESSIEURS CASSINI DE THURY, BEZOUT & JEAURAT, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. BAILLY, intitulé, *Essai sur la Théorie des Satellites de Jupiter*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris le 8 Février 1766.

Signé, GRANDJEAN DE FOUCHI.

PRIVILEGE
DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne ville de Paris nous ont fait exposer qu'ils auroient besoin de nos Lettres de Privilege pour l'impression de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Exposans, Nous leur avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer par tel Imprimeur qu'ils voudront choisir, toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon leur semblera, & de

les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci-dessus spécifiés, il en puisse être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie: Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages seront remis ès mains de notre très cher & féal Chevalier le sieur D'AGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique; un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très cher & féal Chevalier le sieur D'AGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des Présentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayant cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. DONNE' à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Février, l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre Regne le trente-cinquieme. Par le Roi en son Conseil. MOL.

Registré sur le Registre XII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N. 430, Fol. 309, conformément au Régle-

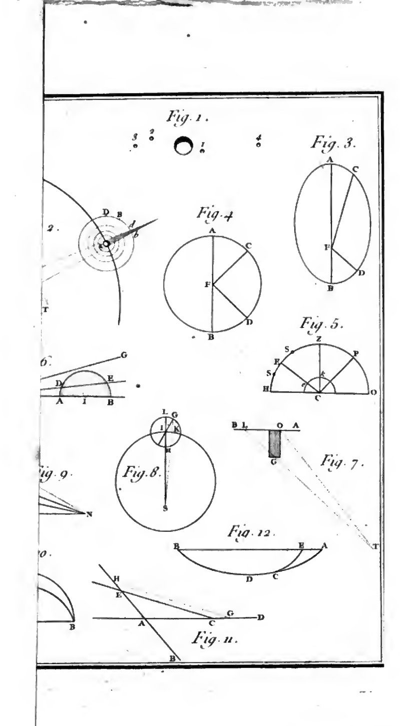
ment de 1723, qui fait défenses, art. 4, à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. 108 du même Réglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, Syndic.

ESSAI

elque qualité
, de vendre,
'en disent les
hambre huit
ent. A Paris

ESSAI




BIBLIOTECA NAZIONALE · VITTORIO EMANUELE III · NAPOLI



ESSAI

SUR LA THÉORIE

DES

SATELLITES DE JUPITER.

Principes de la ſolution du Problême des trois Corps, ſur leſquels cette Théorie eſt fondée.

§. I.

SOIT I le centre de Jupiter, [*fig.* 1.]
L le lieu du Satellite dans ſon orbite AL,
AL l'arc décrit depuis une certaine époque,
R le lieu du Satellite perturbateur,
BR l'arc décrit par ce Satellite depuis la même époque.

Soit $LI = r$,

$AIL = v$,

M somme des masses de Jupiter & du Satellite L,

O masse du Satellite perturbateur R,

$BR = z$,

$v - z = t$.

La force avec laquelle R agit sur L sera $\frac{O}{RL^2}$, laquelle, décomposée suivant LH & LI, donnera les deux forces $-\frac{O.RI}{RL^3}$ & $\frac{O.LI}{RL^3}$. Si l'on retranche de la premiere de ces deux forces, celle avec laquelle R agit sur I, on aura $-\frac{O.RI}{RL^3} + \frac{O}{RI^2}$. Décomposant encore cette force en deux autres, qui agissent suivant LI & suivant la perpendiculaire à LI, on aura $-O.RI\left(\frac{1}{RL^3} - \frac{1}{RI^3}\right)$ cos. t, & $-O.RI\left(\frac{1}{RL^3} - \frac{1}{RI^3}\right)$ sin. t.
Ajoutant la premiere de ces deux forces à celle qui a déja été trouvée suivant LI, on aura, pour les forces qui troubleront les mouvemens du Satellite L, $-O.RI\left(\frac{1}{RL^3} - \frac{1}{RI^3}\right)$ cos. t $+\frac{O.LI}{RL^3}$, suivant la direction LI; & $-O.RI\left(\frac{1}{RL^3} - \frac{1}{RI^3}\right)$ sin. t, suivant une direction perpendiculaire à LI.

Soit nommée la premiere de ces deux forces φ, & la seconde π.

Si l'on suppose que l'orbite perturbatrice soit en dedans de l'orbite troublée, les forces φ & π seront

[*fig.* 2.] $-O.RI\left(\frac{1}{RL^3} - \frac{1}{RI^3}\right)$ cos. $t + \frac{O.LI}{RL^3}$

$+O.RI\left(\frac{1}{RL^3} - \frac{1}{RI^3}\right)$ sin. t.

§. II.

Maintenant si l'on suppose que le Satellite attiré vers Jupiter par une force $\frac{M}{rr}$, eût décrit une ellipse dont l'équation fût

$\frac{p}{r} = 1 - c \operatorname{cof.} v$, l'équation de l'orbite troublée fera

$\frac{p}{r} = 1 - c \operatorname{cof.} v + \operatorname{fin.} v \int \Omega \operatorname{cof.} v\, dv - \operatorname{cof.} v \int \Omega \operatorname{fin.} v\, dv$, &

$\frac{p}{r} = 1 - c \operatorname{cof.} v + \Delta$, en faifant $\int \frac{\pi r^3 dv}{pM} = \varrho$, &

$\dfrac{\frac{\varphi r^3}{M} + \frac{\pi r dr}{M dv} - 2\varrho}{1+\varrho} = \Omega$, & $\operatorname{fin.} v \int \Omega \operatorname{cof.} v\, dv - \operatorname{cof.} v \int \Omega$ $\operatorname{fin.} v\, dv = \Delta$.

§. III.

L'expreffion du tems employé à décrire l'arc AL fera $\int \frac{rr\,dv}{\sqrt{pM}\sqrt{1+\varrho}}$.

§. IV.

Si Ω peut être exprimée par une fuite de cofinus d'angles multiples de v, tels que

$$\Omega = A \operatorname{cof.} nv + B \operatorname{cof.} mv + \&c. \text{ on aura}$$

$\operatorname{fin.} v \int \Omega\, dv - \operatorname{cof.} v \int \Omega\, dv \operatorname{fin.} v = \frac{A}{nn-1} \operatorname{cof.} v - \frac{A}{nn-1} \operatorname{cof.} nv$ $+ \frac{B}{mm-1} \operatorname{cof.} v - \frac{B}{mm-1} \operatorname{cof.} mv + \&c.$

nommant Ξ cette fuite de termes, on aura

$$\frac{p}{r} = 1 - c \operatorname{cof.} v + \Xi.$$

§. V.

Dans une équation telle que $x = v + a \operatorname{fin.} mv$, où a eft une quantité au-deffous de 0, 1, & où m n'eft pas fort différent de l'unité, la valeur de v en x fera déterminée affez exactement par la formule

$v = x - a\left(1 - \frac{m^2 a^2}{8}\right) \operatorname{fin.} mx + \frac{1}{2} a^2 m \operatorname{fin.} 2mx - \frac{3}{8} a^3 m^3$ $\operatorname{fin.} 3mx$.



PREMIERE PARTIE.

Des perturbations du Soleil & de Saturne.

§. I.

Nous supposerons l'orbite de Jupiter circulaire. Je me suis assuré [a] que son excentricité n'introduisoit aucun changement sensible dans les équations qui naissent des perturbations du Soleil.

La force φ sera $- O.SI\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{SI^3}\right)$ cos. $t + \frac{O.LI}{SL^3}$

π . . $- O.SI\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{SI^3}\right)$ sin. t, [*fig.* 3.]

dont la premiere agit dans la direction du rayon recteur LI, & l'autre dans celle de la tangente de son orbite.

Nommant SI . . f, la distance moyenne du Satellite k,
LT . . r

le moyen mouvement de Jupiter . . . . z,
celui du Satellite . . . . x,
le mouvement vrai du Satellite . . . . . v,
son excentricité . . . . . . e,
faisant $z - v$ . . . . t,

on aura $SL = (f^2 + r^2 - 2fr \cos t)^{\frac{1}{2}} = f\left(1 - \frac{r}{f}\cos t\right)$, en négligeant les r^2; & par conséquent $SL^3 = f^3\left(1 - \frac{3r}{f}\cos t\right)$. Donc $\varphi = \frac{Or}{f^3} - \frac{3Or}{f^3}\cos^2 t$, ou $- \frac{\frac{1}{2}Or}{f^3} - \frac{\frac{3}{2}Or}{f^3}\cos 2t$, & $\pi = - \frac{3Or}{f^3}\cos t \sin t = - \frac{\frac{3}{2}Or}{f^3}\sin 2t$.

§. II.

Par ces valeurs de φ & de π, on obtiendra celles de ϱ =

[a] Mémoires de l'Académie, Année 1763. Second Mémoire.

$-\int \frac{3Or^4}{2kMf^3} \text{ſin } 2t\,dv$, $\Omega = -\frac{Or^3}{2Mf^3} - \frac{2Of^3}{3Mf^3} \text{coſ } 2t - \frac{3Or^2dr}{2Mf^3dv}$ $\text{ſin } 2t - 2\varrho$.

Nommant α la fraction $\frac{Ok^3}{Mf^3}$, qui exprime le quarré du rapport des révolutions périodiques de Jupiter & de ſon Satellite, on aura les valeurs ſuivantes : $\varrho = -\frac{3}{2}\alpha \int \frac{r^4}{k^4} \text{ſin } 2t\,dv$, $\Omega = -\frac{\alpha r^3}{2k^3} - \frac{3\alpha r^3}{2k^3} \text{coſ } 2t - \frac{3\alpha r^2 dr}{2k^3 dr} \text{ſin } 2t - 2\varrho$.

§. III.

Comme les perturbations du Soleil n'alterent pas beaucoup l'orbite, nous pourrions tirer les valeurs de r & de ſes puiſſances, de l'équation de l'orbite non troublée $\frac{p}{r} = 1 - c \text{ coſ } v$; mais cette ſuppoſition s'éloigneroit trop de la vérité, puiſque cette équation eſt celle d'une ellipſe immobile. La ſuite de cet Ouvrage fera voir que cette ſuppoſition ne peut avoir lieu pour aucun des Satellites. Pour ſe rapprocher du vrai, autant qu'il eſt poſſible, il faudra donc tirer les valeurs de r & de ſes puiſſances, de l'équation $\frac{k}{r} = 1 - e \text{ coſ } mv$, dans laquelle k & e repréſenteront la moyenne diſtance & l'excentricité du Satellite, données par obſervation, c repréſentant alors l'excentricité primitive, c'eſt-à-dire, celle qui auroit eu lieu ſans les perturbations.

On aura, en négligeant les troiſiemes puiſſances de e,

$$\frac{r^4}{k^4} = 1 + 4e \text{ coſ } mv + 5ee \text{ coſ } 2mv,$$

$$\frac{r^3}{k^3} = 1 + 3e \text{ coſ } mv + 3ee \text{ coſ } 2mv,$$

$$\frac{r^2}{k^2} = 1 + 2e \text{ coſ } mv + \frac{3}{2}ee \text{ coſ } 2mv,$$

$$\frac{3r^2dr}{k^3dv} = 1 - 3em \text{ ſin } mv - 6eem \text{ ſin } 2mv.$$

Quant aux valeurs de ſinus & de coſinus $2t$, nous les tirerons de l'expreſſion générale du tems dans les deux orbites ; ſavoir,

dans l'orbite de Jupiter ſuppoſée circulaire, le tems eſt $\frac{f^{\frac{1}{2}}\tau}{\gamma O} = \frac{f^{\frac{1}{2}}(v-t)}{\gamma O}$; dans l'orbite du Satellite, le tems eſt $\int\frac{rrdv}{\sqrt{kM(1+2\rho)}}$, dans laquelle nous omettrons le facteur $1+2\rho$, parceque ρ appartient à l'orbite troublée; & ſubſtituant la valeur de $\frac{rr}{kk}$, & intégrant $\frac{\int r^2dv}{\gamma kM} = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\gamma M}\left(v + \frac{2e}{m}\sin mv + \frac{3ee}{4m}\sin 2mv\right)$; égalant ces deux expreſſions du tems dans les deux orbites; ſubſtituant, pour $\frac{k^{\frac{3}{2}}\gamma O}{f^{\frac{1}{2}}\gamma M}$, le rapport du mouvement moyen de Jupiter à celui du Satellite, que nous nommerons $1-\frac{1}{n}$, on tirera la relation de t à v, $\frac{f^{\frac{1}{2}}(v-t)}{\gamma O} = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\gamma m}\left(v + \frac{2e}{m}\sin mv + \frac{3ee}{4m}\sin 2mv\right)$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(v + \frac{2e}{m}\sin mv + \frac{3ee}{4m}\sin 2mv\right) = v - t$,

$t = \frac{1}{n}v - \epsilon\sin mv - \delta\sin 2mv$, faiſant $\epsilon = \frac{2e}{m}\left(1-\frac{1}{n}\right)$;

$$\delta = \frac{3ee}{4m}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

& par conſéquent on aura

$$\sin 2t = \sin\frac{2v}{n} + \epsilon\sin\left(\frac{2}{n}-m\right)v + \delta\sin\left(\frac{2}{n}-2m\right)v,$$

$$\cos 2t = \cos\frac{2v}{n} + \epsilon\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v + \delta\cos\left(\frac{2}{n}-2m\right)v.$$

§. V.

La valeur de ρ, $-\frac{3}{2}\alpha\int\frac{r^4}{k^4}\sin 2t\,dv$, deviendra $\rho = \frac{3}{2}\alpha a\cos\frac{2v}{n} + \frac{3}{2}\alpha b\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v - \frac{3}{2}\alpha d\cos\left(\frac{2}{n}-2m\right)v - P\alpha$, en faiſant $a = \frac{1}{2}n$, $b = \frac{2e+\epsilon}{\frac{2}{n}-m}$, $-d = \frac{\frac{3}{2}ee+\delta+2e\epsilon}{2m-\frac{2}{n}}$, & ajoutant, après l'intégration, la conſtante $P = \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b - \frac{3}{4}d$, afin que ρ ſoit zero à l'origine des v.

§. VI.

On trouvera de même $\Omega = A - B \operatorname{cof} m v - C \operatorname{cof} \frac{2}{n} v - D \operatorname{cof} \left(\frac{2}{n} - m\right) v + E \operatorname{cof} \left(\frac{2}{n} - 2m\right) v$, en faifant $-\frac{1}{2}\alpha - 2 P \alpha = A$, $\frac{3}{2}\alpha e = B$, $3 a \alpha + \frac{3}{2}\alpha = C$, $\frac{9}{4} e \alpha - \frac{3}{4} e \alpha m + 3 b \alpha = D$, $-\frac{9}{4}\alpha e e - \frac{9}{4} e \alpha \beta - \frac{3}{2}\alpha \delta + 3 d \alpha = E$.

§. VII.

L'équation générale de l'orbite fera donc $\frac{1}{r} = \frac{1 + A}{p} - \frac{1}{p}\left(C + \frac{B}{mm - 1} + \frac{C}{\frac{4}{nn} - 1} + \&c.\right) \operatorname{cof} v + \frac{B}{p(mm-1)} \operatorname{cof} m v + \frac{C}{p\left(\frac{4}{nn} - 1\right)} \operatorname{cof} \frac{2}{n} v + \frac{D}{p\left(\left(\frac{2}{n} - m\right)^2 - 1\right)} \operatorname{cof} \left(\frac{2}{n} - m\right) v + \frac{E}{p\left(\left(\frac{2}{n} - 2m\right)^2 - 1\right)} \operatorname{cof} \left(\frac{2}{n} - 2m\right) v$. Cette équation, comparée avec celle de l'orbite véritable $\frac{1}{r} = \frac{1}{k} - \frac{e}{k} \operatorname{cof} m v$, donnera les équations fuivantes, $\frac{1 + A}{p} = \frac{1}{k}$, $-e = \frac{Bk}{p(mm-1)}$, & $\frac{1}{p}\left(C + \frac{B}{mm - 1} + \frac{C}{\frac{4}{nn} - 1} + \&c.\right) = 0$. Faifant enfuite, pour fimplifier ces expreffions, $\frac{4}{nn} - 1 = 3$, $\left(\frac{2}{n} - 2m\right)^2 - 1 = -1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{k} - \frac{e}{k} \operatorname{cof} m v + \frac{C}{3k} \operatorname{cof} \frac{2}{n} v + \frac{D}{k\left(\left(\frac{2}{n} - m\right)^2 - 1\right)} \operatorname{cof} \left(\frac{2}{n} - m\right) v - E \operatorname{cof} \left(\frac{2}{n} - 2m\right) v$, ou $\frac{k}{r} = 1 - e \operatorname{cof} m v + \Xi$, en faifant les trois derniers termes égaux à Ξ.

§. VIII.

Alors $\frac{r^2}{k^2} = 1 + 2e \operatorname{cof} m v + \frac{3}{2} e e \operatorname{cof} 2 m v - 2\Xi -$

$6e\Xi \cos mv$. Subſtituant cette valeur dans l'expreſſion du tems $\int \frac{rrdv}{\sqrt{kM(1+2\varrho)}} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{M}} \int \frac{rr}{kk}(1-\varrho)\, dv$, on trouvera $\frac{r^2}{k^2}(1-\varrho) = 1 + 2e\cos mv + \frac{3}{2}ee\cos 2mv - 2\Xi - \varrho - (6e\Xi + 2e\varrho)\cos mv$, ou $1 + \text{P}\alpha + 2e(1+2\text{P}\alpha)\cos mv$

$$+ \frac{3}{2}ee\cos 2mv.$$

$$-\frac{2C}{3}\cos\frac{2}{n}v - \frac{2D}{\left(\frac{2}{n}-m\right)^2-1}\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v + 2E\cos\left(\frac{2}{n}-2m\right)v,$$

$$-\frac{3}{2}\text{a}\alpha \quad -\frac{3}{2}\text{b}\alpha \quad +\frac{3}{2}\text{d}\alpha$$

$$-Ce \quad + \frac{3De}{\left(\frac{2}{n}-m\right)^2-1}$$

$$-3Ee$$

$$-\frac{3}{2}\text{a}\alpha e \quad -\frac{3}{2}\alpha\text{b}e$$

$$+\frac{3}{2}\alpha\text{d}e$$

ou, en négligeant tous les termes négligeables,

$$1 + 2e(1+\text{P}\alpha)\cos mv - \frac{2C}{3}\cos\frac{2}{n}v - \frac{2D}{\left(\frac{2}{n}-m\right)^2-1}$$

$$\text{P}\alpha + \frac{3}{2}ee\cos 2mv \quad -\frac{3}{2}\text{a}\alpha \quad -\frac{3}{2}\text{b}\alpha$$

$$\cos\left(\frac{2}{n}-m\right)v + 2E\cos\left(\frac{2}{n}-2m\right)v.$$

$$+\frac{3}{2}\text{d}\alpha$$

$$-\frac{3De}{\left(\frac{2}{n}-m\right)^2-1}$$

§. IX.

Mettant les lettres H, Q, R, au lieu des coefficiens des trois derniers termes, & intégrant, on aura $\int \frac{rrdv}{kk}(1-\varrho) = (1+\text{P}\alpha)v$

$$+ \frac{2e+2\text{P}\alpha}{m}\sin mv - \frac{1}{2}Hn\sin\frac{2}{n}v + \frac{Q}{\frac{2}{n}-m}\sin\left(\frac{2}{n}-m\right)v.$$

$$+\frac{3}{4}ee\sin 2mv \quad - \frac{R}{\frac{2}{n}-2m}\sin\left(\frac{2}{n}-2m\right)v$$

SECONDE

SECONDE SECTION.

Application de ces formules à la théorie du quatrieme Satellite.

§. X.

Soit, suivant M. Cassini, le mouvement diurne de Jupiter . . . . . . $4' \, 59'', 27$,
celui du quatrieme Satellite . . $21° \, 54' \, 16''$;
la révolution périodique de Jupiter $4332^j \, 12^h$,
celle du quatrieme Satellite . $16^j \, 16^h \, 32' \, 8''$.
D'où on tirera $1 - \frac{1}{n}$ . . . $0,0038538$,
α . . . $0,0000148\text{5}$.

Soit la distance du 4ᵉ Sat. au centre de Jup. $25\frac{1}{3}$ demi diametre de Jupiter.
la valeur de m, connue à-peu-près . . $0,9999$,
l'excentricité déterminée par M. Maraldi . $0,00813$,
la distance moyenne k étant . . . . $1,00000$.

§. XI.

Nommant t l'élongation, ou la distance du Satellite au Soleil, y l'anomalie moyenne du Satellite, on tirera des formules de la Section précédente, au moyen des élémens que nous venons d'établir,

$$\frac{1}{r} = 1 - 0,00813 \cos y + 0,00001489 \cos 2t - 0,00006521 \cos(2t - y), \\ - 0,00000098 \cos(2t - 2y)$$

$$\& \; x = v + 0,016262 \sin y - 0,00002055 \sin 2t + 0,00013172 \sin(2t - y). \\ + 0,0000496 \sin 2y \qquad - 0,00052787 \sin(2t - 2y)$$

$$\& \; v = x - 0,016259 \sin y + 0,00002055 \sin 2t - 0,00013172 \sin(2t - y). \\ + 0,001599 \sin 2y \qquad + 0,00052787 \sin(2t - y)$$

ou $v = x - 55' 54'' \sin y + 4''$ [a] $\sin 2t - 27'' \sin(2t - y)$:
$+ 0' 33'' \sin 2y \qquad + 1' 49'' \sin(2t - 2y)$
& dans le cas des éclipses, qui est le seul intéressant dans la théorie des Satellites de Jupiter, t étant o, l'équation deviendra $v = x - 55' 27'' \sin y - 1' 16'' \sin 2y$ [b].

§. XII.

Du mouvement de l'apside.

Nous en tirerons l'expression de l'équation $- e = \frac{Bk}{p(mm - 1)}$; mais $B = \frac{3}{2} \alpha e$, donc $- 1 = \frac{\frac{3}{2} \alpha k}{p(mm - 1)}$; $1 - mm = \frac{\frac{3}{2} \alpha k}{p}$, donc $1 - \frac{3}{2} \frac{\alpha k}{p} = mm$, & $m = 1 - \frac{3}{4} \frac{\alpha k}{p}$; & par conséquent m . . . 0,99998887, & le mouvement de l'apside 14″ 43 par révolution, ou 5′ 14″ 6 par an.

§. XIII.

La valeur de m, que nous venons de trouver, n'est pas la même que celle que nous avons supposée dans le §. X; mais les observations ont fait connoître à M. Maraldi, que le mouvement de l'apside étoit de 45′, environ, par an; ce qui donne m 0,999905, quantité qui ne s'éloigne que très peu de celle que j'ai établie. D'ailleurs les perturbations du Soleil ne sont pas la seule cause du mouvement des apsides, puisque les perturbations mutuelles & la figure de Jupiter y doivent contribuer beaucoup, comme on le verra dans la seconde Partie de cet Ouvrage.

[a] Newton dit que la *variation*, dans le quatrieme Satellite de Jupiter ne doit pas passer 5″ 12‴, Liv. III, Prop. XIII.

[b] M. Maraldi a trouvé par les observations, que l'équation qui dépend du sinus y, étoit de 55′ 54″; nous la trouvons ici diminuée de 27″. Il faudra donc recommencer ce calcul, en supposant l'équation du centre de 56′ 21″; ce qui augmentera peu l'équation 1′ 16″. Mais en attendant qu'on mette cette exactitude dans le calcul, on peut employer l'équation précédente.

§. XIV.

Du mouvement des nœuds.

Nous déduirons le mouvement des nœuds de la XXXe Propoſition du IIIe Liv. des Principes mathématiques de la Philoſophie naturelle de Newton.

La force qui tire le Satellite vers le Soleil dans une direction parallele à la ligne menée de Jupiter au Soleil [*fig.* 3.], eſt $-\frac{O.SI}{SL^3}+\frac{O}{SI^3}=-\frac{3O.r}{f^3}\cos t$; & la force centrale qui retient le Satellite dans ſon orbite, eſt $\frac{M}{rr}$. Mais

$$-\frac{3O.r}{f^3}\cos t : \frac{M}{rr} :: -\frac{3Or^3\cos t}{f^3M} : 1 :: -3\alpha\cos t : 1.$$

Dans le cas où le Satellite ſeroit dans les ſizygies, & les nœuds dans les quadratures, le mouvement moyen du nœud eſt au mouvement moyen du Satellite, comme $-3\alpha\cos t$ eſt à 1, ou comme -3α eſt à 1.

M. Newton trouve que le mouvement des nœuds doit varier en raiſon du produit du ſinus de la diſtance du Soleil au nœud du Satellite, du ſinus de la diſtance du Satellite à ſon nœud, & du coſinus de l'élongation; d'où il réſulte qu'on aura toujours le moyen mouvement du Satellite au mouvement des nœuds, comme 1 à -3α ($\cos t$ ſin diſt. Sat. au nœud, ſin diſt. Sol. au nœud); ou $-\frac{3}{4}\alpha$ ($1+\cos 2t-\cos 2$ diſt. Sat. au nœud $-\cos 2$ diſt. Sol. au nœud): & en s'attachant ſeulement ici à déterminer le mouvement moyen du nœud, il ſera exprimé par $-\frac{3}{4}\alpha$.

§. XV.

Par conſéquent, dans la théorie du quatrieme Satellite, le mouvement du nœud ſera exprimé par 0,00001114, ou

B ij

14″ 43 de mouvement rétrograde par révolution, 5′ 14″, 8 par an, & 8° 46′ par siecle.

M. Newton trouve qu'il doit être seulement de 8° 24′, en comparant le mouvement des nœuds de la Lune à celui des nœuds de ce Satellite. Liv. III, Prop. XXIII.

Si l'on nomme T le tems périodique de Jup. autour du Soleil,
t le tems périodique de la Terre autour du S.
z celui du Satellite autour de Jupiter,
s celui de la Lune autour de la Terre,

le monvement des nœuds de la Lune sera exprimé par $-\frac{3s^2}{4t^2}$;
le mouvement des nœuds du Satellite sera exprimé par $-\frac{3z^2}{4T^2}$:
ces mouvemens seront donc entr'eux comme $-\frac{3s^2}{4t^2}$ est à $-\frac{3z^2}{4T^2}$. Donc le mouvement des nœuds du Satellite sera au mouvement des nœuds de la Lune, comme $z^2 t^2$ est à $s^2 T^2$, ou en raison composée de la raison doublée du tems périodique du Satellite, au tems de la Lune autour de la Terre, & de la raison doublée du tems de la Terre au tems de Jupiter autour du Soleil. On ne peut croire que M. Newton se soit trompé; mais, il y a, ce me semble, une faute de traduction ou d'impression dans l'endroit cité de la traduction de Madame du Chatelet. On y lit que *le mouvement moyen des nœuds du Satellite le plus éloigné de Jupiter est au mouvement moyen des nœnds de notre Lune en raison doublée du tems périodique de la Terre autour du Soleil au tems périodique de Jupiter autour du Soleil, & de la raison simple du tems périodique du Satellite autour de Jupiter au tems périodique de la Lune autour de la Terre.*

Je crois qu'il faut lire *raison doublée*, au lieu de *raison simple*; & la preuve est que l'on ne retrouveroit pas 8° 24′ en cent ans, en suivant le rapport établi par ce passage; on auroit un mouvement plus grand.

En suivant le rapport que je viens d'établir, & supposant le mouvement annuel des nœuds de la Lune 0, 0040189, le mouvement moyen de la Lune étant 1, on trouvera en cent ans 8° 24′ 16″, comme M. Newton. La différence de ce mouvement à celui que j'ai trouvé précédemment, vient des quantités que j'ai négligées, & auxquelles j'aurai égard par la suite.

M. Maraldi a cru appercevoir que le nœud du quatrieme Satellite avoit un mouvement direct de 5′ 33″ par an. Ceci nous donne lieu de croire que le mouvement des nœuds, produit par l'attraction mutuelle des Satellites, est direct. M. de la Lande a fait voir que ce mouvement rétrograde sur l'orbite du Satellite perturbateur devient souvent direct, lorsqu'on le rapporte à l'orbite de Jupiter. *Voyez* la troisieme Partie.

§. XVI.

Dans mon premier Mémoire, j'avois déterminé, par la solution de M. Clairaut, ce mouvement de 14″ 5, précisément le même que celui que je trouve aujourd'hui par les principes de Newton.

On y verra que, quoique ce mouvement ne soit que de 15″ par révolution, il doit être corrigé par une équation qui est de 5′ dans son *maximum*. Mais cette équation peut être négligée, parcequ'elle ne peut influer que vers les limites des éclipses, & qu'alors l'incertitude des observations rend cette correction inutile.

§. XVII.

Révolutions périodiques des trois premiers Satellites.

III	7ʲ	3ʰ	42′	33″,
II	3	13	13	42,
I	1	18	27	33.

TROISIEME SECTION.

Application des formules à la théorie des trois autres Satellites.

§. XVIII.

On ne connoît point encore d'excentricités aux trois premiers Satellites. M. Maraldi m'a dit qu'il ſoupçonnoit que le troiſieme Satellite avoit une équation du centre d'environ 20′ : M. Wargentin ſemble lui en ſuppoſer une de 16′ 46″. On verra dans la troiſieme Partie, que cette équation ne peut être auſſi conſidérable. Or, en la ſuppoſant de 20′, nommant x l'élongation du Satellite, & y ſon anomalie moyenne, j'ai trouvé $v = x - 20' \sin y - 7'' \sin 2y$. D'où je conclus que les équations produites par l'action du Soleil ſont abſolument négligeables.

§. XIX.

Quant aux excentricités du ſecond & du premier, je crois que je pourrai faire voir dans la troiſieme Partie, qu'ils en ont une. Celle du premier paroît même aſſez grande, & plus grande que celle du quatrieme : mais les équations qu'elles peuvent produire ſont abſolument négligeables, à cauſe de la rapidité du mouvement de ces Satellites ; car (§. VI & VIII) le coefficient de la plus grande équation $2x - 2y$, qui ſe trouve dans la théorie du quatrieme Satellite, a pour facteurs l'excentricité, le rapport du quarré des révolutions périodiques du Satellite & de Jupiter, & ce coefficient eſt toujours diviſé par $\frac{1}{n} - 2m$. D'où il ſuit que dans la théorie d'un Satellite plus voiſin de Jupiter, ce coefficient diminuera, 1°. en raiſon du

quarré des révolutions périodiques, 2°. en raiſon de l'excentricité; 3°. que ce coefficient diminuera encore d'autant plus, que le mouvement de l'apſide ſera plus grand, parceque m étant plus petit, le diviſeur $\frac{2}{n} - 2m$ augmentera. D'où il eſt aiſé de conclure que tout ici contribue à diminuer ces équations pour le ſecond & le premier Satellites, & à les rendre abſolument négligeables.

§. XX.

Le mouvement de l'apſide ſe tire toujours de la fraction $-1 = \frac{\frac{3}{2}\alpha k}{p(mm-1)}$. Mais, comme $\frac{k}{p}$ differe très peu de l'unité, on aura $m = 1 - \frac{3}{4}\alpha$: ce qui donne 2″ *66* par révolution, & . . . . 2′ 15″ 5 par an, tant pour le mouvement de l'apſide, que pour celui du nœud.

§. XXI.

Mouvement de l'apſide & du nœud du ſecond Satellite.

Par révolution . . .	0″ 7,
Par an	1′ 7″ 8.

Mouvement de l'apſide & du nœud du premier Satellite.

Par révolution . . .	0″.16,
Par an	0′ 33″ 5.



QUATRIEME SECTION.

Examen des perturbations de Saturne sur les Satellites de Jupiter.

§. XXII.

SOIT reprise l'expression des forces du §. I, $\varphi = -\frac{\frac{1}{2}Or}{f^3} - \frac{\frac{1}{2}Or}{f^3}\operatorname{cof} 2t$, $\pi = -\frac{\frac{1}{2}Or}{f^3}\sin 2t$, dans lesquelles f^3 représente la distance variable de Saturne à Jupiter.

Cette distance, au tems de la conjonction des deux planettes, est environ 4, 3322 parties, dont le rayon de la Terre en contient 1, 0000.

Au tems de l'opposition elle est 14, 7282.

Pour estimer ces forces dans leur plus grande valeur, supposons que Saturne & Jupiter soient en conjonction à l'égard du Soleil, & que Saturne & le Satellite soient en conjonction à l'égard de Jupiter; on aura alors $\varphi = -\frac{2Or}{f^3}$, $\pi = 0$.

Nous nous servirons, pour comparaison, des forces déterminées précédemment, avec lesquelles le Soleil trouble les mouvemens des Satellites; & nous dirons : la force φ produite par le Soleil, est à la force φ produite par Saturne, en raison directe des masses des planetes perturbatrices, & en raison inverse du cube de leurs distances à Jupiter, ou comme 1 est à 0, 000571, ou à-peu-près comme 2000 à 1.

Les forces π, produites par le Soleil & par Saturne, seront dans le même rapport, au tems de la quadrature du Satellite avec Saturne, à l'égard de Jupiter, supposant toujours Saturne & Jupiter en conjonction.

Mais

Mais quand on sortira de cette supposition, & que ces deux planetes s'approcheront, au contraire, de leur opposition, les forces perturbatrices de Saturne diminueront encore en raison inverse du cube de la distance de Saturne à Jupiter; & comme leur distance, dans ce dernier cas, est plus de trois fois la distance dans le premier, les forces φ & π diminueront dans un rapport plus grand que celui de 27 à 1.

Il est donc démontré, par la petitesse des forces perturbatrices du Soleil, que celles de Saturne ne peuvent produire aucun effet sensible.

§. XXIII.

Cependant les forces de Saturne sur Jupiter peuvent, en déplaçant son systême, avancer ou retarder les éclipses de ses Satellites. Il faut donc, pour établir une bonne théorie des Satellites de Jupiter, avoir bien approfondi la théorie de Jupiter même. Mais cette branche de l'Astronomie n'a pas encore été portée à une exactitude suffisante, & c'est peut-être une difficulté insurmontable dans le sujet du prix proposé par l'Académie.

Les meilleures Tables donnent encore souvent 6′ à 7′ d'erreur sur la longitude de Jupiter.

Le célebre M. Euler [a] a traité avec beaucoup d'élégance cette matiere importante. Feu M. Mayer, Astronome de Gattingue, déduisit de sa théorie, des équations qui ont été insérées dans la Connoissance des mouvemens célestes [b]: mais cet Astronome n'a pas sans doute suivi exactement la théorie; car ces petites équations écartent le calcul de l'observation, aussi souvent qu'elles le rapprochent. M. Jeaurat [c], qui a fait

[a] Voyez la piece qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences en 1748 & 1750.
[b] Année 1763.
[c] De l'Académie des Sciences.

un très grand travail ſur la théorie de Jupiter, m'a dit qu'il n'avoit jamais pu concilier [a] toutes les obſervations, en admettant les équations de M. Mayer : au lieu qu'en les rejettant, & en rectifiant ſeulement les élémens, il eſt parvenu à repréſenter les obſervations à 3′ près dans les cas les plus défavorables.

Mais ces 3′ laiſſent encore dans la théorie des Satellites de Jupiter une incertitude de 21″ pour le premier, de 43″ pour le ſecond, de 1′ 26″ pour le troiſieme, & de 3′ 20″ pour le quatrieme.

Ainſi, quand la théorie des Satellites de Jupiter deviendroit plus parfaite que celle de toutes les autres planetes de notre ſyſtême, elle ſeroit encore aſſujettie à cette erreur.

Cet obſtacle ne pourra être levé que lorſque les Géometres & les Aſtronomes ſeront parvenus, par de nouveaux efforts, à découvrir quelle peut être la ſource des erreurs qui rendent la théorie de Jupiter ſi défectueuſe. On verra dans la troiſieme Partie le moyen dont je me ſers pour que les déterminations que j'y établis ne ſoient point affectées de l'erreur qui peut ſe trouver ſur la longitude de Jupiter.

[a] Voyez la troiſieme Partie, §. 63.



SECONDE PARTIE.

Des attractions mutuelles des Satellites de Jupiter.

PRMIERE SECTION.

§. I.

La premiere difficulté qui se présente dans le problême de déterminer les attractions mutuelles des Satellites, est celle de mettre la fonction qui exprime leur distance, sous une forme commode pour le calcul. Cette difficulté s'est déja présentée dans la théorie de Saturne & de Jupiter, & dans celle de Venus & de la Terre.

§. II.

Soient a & b les rayons des orbites de deux Satellites, b étant toujours celui de l'orbite la plus éloignée de Jupiter; t l'angle d'élongation, ou la différence de leurs longitudes moyennes.

Leur distance sera exprimée par $(a^2+b^2-2ab\cos t)^{\frac{1}{2}}$; & la fonction de cette distance, qui entre dans la composition des forces φ & π, sera par conséquent $\frac{1}{(a^2+b^2-2ab\cos t)^{\frac{1}{2}}}$.

§. III.

Dans la premiere Partie, où j'ai traité des perturbations du Soleil, j'ai négligé les quantités de l'ordre de $\frac{a^2}{b^2}$, parceque, même pour le quatrieme Satellite, ce rapport $\frac{a^2}{b^2}$ n'excede pas $\frac{1}{196249}$. Je pouvois regarder cette fraction comme nulle : j'ai

considéré par conséquent le terme $2ab \cos t$ comme très petit. Mais dans le cas des perturbations mutuelles où ce rapport est fini, ces suppositions ne sont plus permises.

La fonction $(a^2 + b^2 - 2ab \cos t)^{-\frac{1}{2}}$ ne peut se simplifier, & la difficulté consiste à l'exprimer par une suite qui soit assez convergente pour n'être pas obligé de prendre un grand nombre de termes.

M. Euler [a], dans son excellent Mémoire sur la théorie de Saturne, y a réussi très heureusement; mais il n'a pas indiqué la route qu'il avoit suivie.

M. Clairaut [b] y est arrivé aussi par la méthode des quadratures. C'est de celle-ci que nous allons faire usage. La pratique en est pénible; mais elle a l'avantage d'être susceptible du degré d'exactitude que l'on veut lui donner [c].

§. IV.

Si l'on établit $\frac{a}{b} = \omega$, & $\frac{2\omega}{1+\omega^2} = \theta$, la fonction se réduira à $\frac{\omega^3}{a^3(1+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}(1 - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}}$, dont la partie variable est $(1 - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}}$, à laquelle il faut substituer $A + B \cos t + C \cos 2t + D \cos 3t + E \cos 4t + F \cos 5t +$ &c. $= (1 - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}}$.

§. V.

Quand on traitera la théorie du Satellite dont le rayon est $a = 1$, on multipliera les coefficiens A, B, C, &c. de la série par $\frac{\omega^3}{(1+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$, quantité constante: mais quand on passera à la théorie de l'autre Satellite dont le rayon est $b = 1$, a

[a] Voyez la Piece qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences en 1748, page 28 & suivantes

[b] Mémoires de l'Académie. Année 1754.

[c] J'aurois pu supprimer ce détail, dont une partie se trouve dans le Mémoire de M. Clairaut; mais j'ai cru que je serois plus clair, en rapportant & en étendant ses principes.

deviendra égal à ω ; & conféquemmment il fuffira de multiplier les coefficiens de la férie par $\frac{1}{(1+\omega^2)^{\frac{1}{2}}}$.

§. V I.

Préfentement, pour déterminer les coefficiens de la férie, on fuppofera la circonférence du cercle partagée en un nombre infini de parties égales $\frac{1}{n}c$, en faifant t fucceffivement égal à $\frac{1}{n}c$, $\frac{2}{n}c$, $\frac{3}{n}c$, $\frac{4}{n}c$, &c. On fubftituera ces différentes valeurs de t dans $(1-\theta \cos t)^{-\frac{1}{2}}$; & nommant H, I, K, L, &c. les quantités que devient cette fonction, fuivant ces différentes fubftitutions, on aura

$$H = A + B\cos\tfrac{1}{n}c + C\cos\tfrac{2}{n}c + D\cos\tfrac{3}{n}c + E\cos\tfrac{4}{n}c + \&c.$$

$$I = A + B\cos\tfrac{2}{n}c + C\cos\tfrac{4}{n}c + D\cos\tfrac{6}{n}c + E\cos\tfrac{8}{n}c + \&c.$$

$$K = A + B\cos\tfrac{3}{n}c + C\cos\tfrac{6}{n}c + D\cos\tfrac{9}{n}c + E\cos\tfrac{12}{n}c + \&c.$$

$$L = A + B\cos\tfrac{4}{n}c + C\cos\tfrac{8}{n}c + D\cos\tfrac{12}{n}c + E\cos\tfrac{16}{n}c + \&c.$$

Ayant pouffé l'opération jufqu'à $t = \frac{n}{n}c$, on verra que tous les termes des colonnes, B, C, D, E, fe détruiront, parceque dans chacune il y aura autant de cofinus négatifs que de pofitifs, & qu'il ne reftera que $nA = H + I + K + L +$ &c. & par conféquent $A = \frac{H+I+K+L+\&c.}{n}$, valeur d'autant plus exacte, que le cercle aura été divifé en un plus grand nombre de parties.

Donc, fi les arcs t font placés fur un axe, & font les abciffes correfpondantes aux ordonnées $(1-\theta\cos t)^{-\frac{1}{2}}$, la quadrature de l. courbe $\int \frac{(1-\theta\cos t)^{-\frac{1}{2}}}{c}\,dt$ donnera la valeur rigoureufe de A, fi l'on fait $t = c$ après l'intégration.

En général, pour trouver la valeur d'un coefficient quelconque S d'un terme de la férie $S \operatorname{cof} pt$, on reprendra l'expreffion $(1-\theta \operatorname{cof} t)^{-\frac{1}{2}} = A + B \operatorname{cof} t + C \operatorname{cof} 2t \ldots + S \operatorname{cof} pt$; & multipliant le tout par $\operatorname{cof} pt$, on aura $(1+\theta \operatorname{cof} t)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cof} pt$

$$= A \operatorname{cof} pt + \frac{1}{2} B \operatorname{cof} (p+1)t + \frac{1}{2} C \operatorname{cof} (p+2t) + \frac{1}{2} S \operatorname{cof} 2pt.$$
$$+ \frac{1}{2} B \operatorname{cof} (p-1)t + \frac{1}{2} C \operatorname{cnf} (p-2t) + \frac{1}{2} S$$

Faifant t fucceffivement égal à $\frac{1}{n}c$, $\frac{2}{n}c$, $\frac{3}{n}c$, &c. on verra que toutes les colonnes A, B, C, &c. fe détruiront, & qu'il ne reftera que $\frac{n}{2} S = H \operatorname{cof} \frac{pc}{n} + I \operatorname{cof} \frac{2pc}{n} + K \operatorname{cof} \frac{3pc}{n} + L \operatorname{cof} \frac{4pc}{n} +$ &c. Donc $\frac{1}{2} S = \frac{H \operatorname{cof} \frac{pc}{n} + I \operatorname{cof} \frac{2pc}{n} + K \operatorname{cof} \frac{3pc}{n} + L \operatorname{cof} \frac{4pc}{n} + \&c.}{n}$.
Ce qui fait voir que la valeur rigoureufe de S fera $2 \int \frac{(1-\theta \operatorname{cof} t)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cof} pt\, dt}{c}$, fi l'on fait $t = c$ après l'intégration.

§. VII.

On trouveroit ainfi tous les coefficiens A, B, C, &c. par une méthode qui ne feroit même pas trop pénible, puifque les quantités H, I, K, L, &c. étant d'abord calculées, il fuffiroit de multiplier H par le cofinus $\frac{1}{n}c$, I par le cofinus $\frac{2}{n}c$, &c. pour avoir le coefficient B; & ainfi de fuite pour tous les autres coefficiens C, D, E, &c.

Mais il ne fera néceffaire de calculer par les quadratures, que les deux premiers A & B; on déduit tous les autres de la formule de relation que M. Clairaut a donnée dans le Mémoire déja cité, & qui fait dépendre un coefficient quelconque des deux précédens.

M. Clairaut cherche la relation entre les quadratures qui fervent à trouver trois coefficiens confécutifs.

Pour y parvenir, il différencie l'équation $(h - \cos t)^{m+1} \sin(p+1)t = V$, dont la différentielle se trouvera composée des trois différentielles suivantes, qui appartiennent à trois termes consécutifs de la série

$$ds = (h - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}} \cos pt\, dt,$$
$$ds' = (h - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}} \cos(p+1)t\, dt,$$
$$ds'' = (h - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}} \cos(p+2)t\, dt.$$

La différentielle de l'équation précédente sera $\overline{p+1}(h-\cos t)^{m+1} \cos(p+1)t\, dt + \overline{m+1}(h-\cos t)^{m} \sin \overline{p+1} \sin t\, dt = dV$, qui se réduit à $h(p+1)(h-\cos t)^{m} \cos(p+1)t\, dt + \frac{1}{2}(h-\cos t)^{m}(m-p)\cos pt\, dt - \frac{1}{2}(h-\cos t)^{m}(p+m+2)\cos(p+2)t\, dt = dV$, ou $h(p-1)ds' + \frac{1}{2}(m-p)ds - \frac{1}{2}(p+m+2)ds'' = dV$. Intégrant, faisant $t = c$, V deviendra zero. On aura donc $s'' = \frac{2h(p+1)ds' + (m-p)ds}{p+m+2}$.

§. VIII.

Quand on voudra faire usage de cette formule, il faudra faire attention que les quadratures précédentes ne donnent que la moitié des coefficiens B, C, D, E, &c. au lieu que celle qui sert à déterminer le coefficient A, le donne d'abord tout entier.

De-là il suit que, pour déterminer un coefficient quelconque D, E, F, G, &c. D, par exemple, en substituant pour s & pour s', $\frac{1}{2}B$ & $\frac{1}{2}C$, on trouvera la moitié du coefficient D. Mais si C est le coefficient cherché, il faudra substituer, au lieu de s & de s', A & $\frac{1}{2}B$; ce qui donnera la moitié du coefficient C.

§. IX.

On tire les expreſſions ſuivantes de la formule du §. VII, en faiſant $h = \frac{1}{\theta}$, & $m = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{4B - 6A\theta}{\theta}$, $D = \frac{8C - 5\theta B}{3\theta}$, $E = \frac{12D - 7\theta C}{5\theta}$, $F = \frac{16F - 9\theta D}{7\theta}$, expreſſions qui ſe retrouvent exactement les mêmes que celles que M. Euler a données pour le même objet, page 30 du Mémoire cité ci-deſſus.

§. X.

Nous nous en tiendrons aux termes dont les coefficiens ſont A, B, C, D, E, F, & nous négligerons tous les autres, parceque les équations qui dépendent des ſinus $4t$, $5t$, &c. ne ſont point ſenſibles dans la théorie des Satellites de Jupiter, comme je m'en ſuis aſſuré d'avance. Je n'ai beſoin même des coefficiens E & F, que pour donner toute l'exactitude néceſſaire aux équations dont les argumens ſeront ſin t, ſin $2t$, ſin $3t$. D'ailleurs la loi de ces expreſſions eſt ſi claire, qu'il eſt aiſé de trouver les termes ſuivans.

§. XI.

Dans la pratique des formules précédentes, nous calculerons toutes les valeurs de la fonction $(1 - \theta \cos t)^{-\frac{3}{2}}$, en ſuppoſant t ſucceſſivement de 9, 18, 27, 36, &c. degrés; nous regarderons ces valeurs différentes comme autant d'ordonnées d'une courbe dont les abciſſes ſont les arcs de 9° [a], 18°, 27°, 36°, &c. & l'arc qui paſſe par quatre ou cinq de

[a] Il faut obſerver que, ſi dans la quadrature de $(1 - \theta \cos t)^{-\frac{3}{2}} dt$, l'axe des abciſſes eſt diviſé en parties égales, chacune a 9° ou un 40me de la circonférence, chaque ordonnée doit être multipliée par $\frac{1}{40}c$: mais comme après l'intégration [Voyez §. VI.] il faudra diviſer le tout par c, il ſuffira de multiplier chaque ordonnée par $\frac{1}{40}$, ou en général la diviſer par le nombre des parties dans leſquelles on a partagé la circonférence du cercle.

ces

ces points donnés, comme un arc parabolique dont l'équation eſt $a + bx + cx^2 + ex^3 = y$.

Nommant d, d', d'', d''' les différences premieres, ſecondes, troiſiemes, quatriemes, &c. nous tirerons la valeur des coefficiens indéterminés b, c, e, de ce que

$$\begin{array}{lll}
a & = a & \text{ſupp. } x = 0 \\
a + d & = a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{16}c + \frac{1}{64}e & x = \frac{1}{4} \\
a + 2d + d' & = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}e & x = \frac{1}{2} \\
a + 3d + 3d' + d'' & = a + \frac{3}{4}b + \frac{9}{16}c + \frac{27}{64}e & x = \frac{3}{4} \\
a + 4d + 6d' + 4d'' + d''' & = a + b + c + e & x = 1.
\end{array}$$

Ayant trouvé les valeurs de b, c, e, on les ſubſtituera dans l'équation $a + bx + cx^2 + ex^3 = y$. On multipliera par dx, & l'on aura, après avoir intégré, $\int y\,dx = ax + \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}d'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{6}d''\left(\frac{x^4}{4} - x^3 - 2\right) + \frac{1}{24}d'''\left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{11x^3}{3} - 3x^2\right)$, dans laquelle faiſant $x = 1$, afin d'avoir la quadrature de l'eſpace compris entre la premiere & la cinquieme ordonnée, on aura $\int y\,dx = a + \frac{1}{2}d - \frac{1}{12}d' + \frac{1}{24}d'' - \frac{19}{720}d'''$, où a repréſente la ſomme des ordonnées, la derniere exceptée; d la ſomme des premieres différences, d' la ſomme des ſecondes, &c.

§. XII.

Ayant remarqué que dans la théorie de quelques-uns des Satellites de Jupiter, les ordonnées déterminées par les fonctions de cette eſpece croiſſoient trop inégalement dans les 36 premiers degrés, j'ai quarré ſéparément ces premiers eſpaces, en calculant les ordonnées de 3° en 3°. Peut-être cette exactitude eſt-elle ſuperflue; mais j'ai mieux aimé augmenter mon

travail, que de me permettre des négligences qui auroient pu me conduire à des déterminations trop peu sures.

§. XIII.

Mr Euler, dans la théorie de Saturne, n'indique point la route qu'il a suivie pour trouver la valeur des coefficiens de la série dont il s'agit ici. Il paroît les avoir considérées comme un assemblage de rectangles; & supposant sans doute qu'elles croissent assez uniformément, il les a prises de deux en deux. Alors chaque ordonnée est sensiblement la moyenne entre celle qui la précede & celle qui la suit. C'est pourquoi M. Euler trouve que, si on partage l'angle droit q en dix parties,

$$A = \frac{1}{10}\begin{cases}\left(1 - g\sin\frac{1}{10}q\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 - g\sin\frac{3}{10}q\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 - g\sin\frac{5}{10}q\right)^{-\frac{1}{2}} + \&c.\\ \left(1 + g\sin\frac{1}{10}q\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + g\sin\frac{3}{10}q\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + g\sin\frac{5}{10}q\right)^{-\frac{1}{2}} + \&c.\end{cases}$$

Il assure que cette expression approche tant de la vérité, que l'erreur n'est plus d'aucune conséquence. Effectivement, je me suis assuré qu'elle est très légere, en comparant les quantités que j'ai trouvées par cette méthode, avec celles que j'ai déduites des quadratures.

[a] $A = K(1,207270)$, par la méthode de M. Euler.
$A = K(1,206662)$, par les quadratures.
$0,000608$ Diff.

§. XIV.

Pour ne rien omettre d'important dans un problême si intéressant, nous aurons égard à l'excentricité connue du quatrieme Satellite : nous introduirons même dans le calcul les

[a] Supposant la distance du quatrieme Satellite au premier $K(1 - 0,42605 \cos z)^{\frac{1}{2}}$, le rayon de l'orbite du quatrieme étant 1.

excentricités des trois autres, mais comme indéterminées; & les obſervations nous apprendront enſuite s'il eſt poſſible de connoître la quantité de l'équation du centre qu'elles produiſent, & l'époque où elle eſt la plus grande.

Nous négligerons abſolument les puiſſances de ces excentricités, afin de ne pas compliquer le calcul de conſidérations inutiles.

Mais cette nouvelle conſidération modifie néceſſairement la diſtance réciproque des Satellites, & la fonction $\frac{a^3}{a^3(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}(1-\theta\,\text{coſ}\,t)^{-\frac{3}{2}}$ ne ſera plus la même.

§. XV.

Reprenant donc l'expreſſion de la diſt. $(a^2+b^2-2ab\,\text{coſ}\,t)^{\frac{1}{2}}$, nous regarderons a comme la diſt. moy. du Satellite troublé,

mv ſon anomalie,

e ſon excentricité;

b la diſt. moy. du Satellite perturbateur,

qs ſon anomalie,

f ſon excentricité.

a & b, que nous avons rendu variables, deviendront $a(1+e\,\text{coſ}\,mv)$, & $b(1+f\,\text{coſ}\,qs)$; & la diſtance réciproque des Satellites $[a^2(1+2e\,\text{coſ}\,mv)+b^2(1+2f\,\text{coſ}\,qs)-2ab\,\text{coſ}\,t(1+e\,\text{coſ}\,mv+f\,\text{coſ}\,qs)]^{\frac{1}{2}}$.

Faiſant $a=1$, on trouvera aiſément la fonction $\frac{1}{SL^3}$ égale aux quantités ſuivantes $\frac{1}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[1-\frac{2b}{1+b^2}\text{coſ}\,t+\frac{2eb}{1+b^2}\text{coſ}\,mv\left(\frac{1}{b}-\text{coſ}\,t\right)+\frac{2bf}{1+b^2}\text{coſ}\,qs\,(b-\text{coſ}\,t)\right]^{-\frac{3}{2}}$, dans laquelle regardant les termes où entre l'excentricité, comme fort petits en comparaiſon des autres, nous pourrons

en négliger les fecondes puiffances; & nous aurons, par la formule du binome de Newton, $\frac{1}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}}}\Big[\Big(1-\frac{2b}{1+b^2}.\operatorname{cof} t\Big)^{-\frac{3}{2}}$ $-\frac{3}{2}\Big\{\frac{2eb}{1+b^2}\operatorname{cof} mv\Big(\frac{1}{b}\operatorname{cof} t\Big)+\frac{2bf}{1+b^2}\operatorname{cof} qs(b-\operatorname{cof} t)\Big\}\Big(1-\frac{2b}{1+b^2}\operatorname{cof} t\Big)^{-\frac{5}{2}}\Big]$: ce [a] qui donnera, pour les perturbations d'un Satellite extérieur, en reprenant les dénominations du §. IV, $\frac{\omega^3}{(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\Big[(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}e\theta\operatorname{cof} mv(\omega-\operatorname{cof} t)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}$ $-\frac{3}{2}f\theta\operatorname{cof} qs\Big(\frac{1}{\omega}-\operatorname{cof} t\Big)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}\Big]$; & pour les perturbations d'un Satellite intérieur, $\frac{1}{(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\Big[(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{3}{2}}$ $-\frac{3}{2}e\theta\operatorname{cof} mv\Big(\frac{1}{\omega}-\operatorname{cof} t\Big)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}f\theta\operatorname{cof} qs$ $(\omega-\operatorname{cof} t)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}\Big]$.

Ces expreffions renferment trois quantités qu'il faut réduire en férie.

La premiere eft $(1-\operatorname{cof} t)^{-\frac{3}{2}}$, déja calculée dans les Paragraphes ci-deffus.

Les deux autres font $\Big(\frac{1}{\omega}-\operatorname{cof} t\Big)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}$, & $(\omega-\operatorname{cof} t)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}$.

§. XVI.

En fuivant les principes établis dans le §. VI, on trouvera $A'=\int(\omega-\operatorname{cof} t)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}dt$, $\frac{1}{2}B'=\int(\omega-\operatorname{cof} t)$ $(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}\operatorname{cof} t\,dt$; & en général $\frac{1}{2}S'=\int(\omega-\operatorname{cof} t)$ $(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}\operatorname{cof} pt\,dt$: $A^{\circ}=\int\Big(\frac{1}{\omega}-\operatorname{cof} t\Big)(1-\theta\operatorname{cof} t)^{-\frac{5}{2}}dt$,

[a] Ces dénominations fuppofent qu'on divife toujours la plus petite diftance a par la plus grande b.

$\frac{b}{2} B^{\circ} = \int \left(\frac{1}{a} - \cos t \right) (1 - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}} \cos dt$; & en général $\frac{1}{2} S^{\circ} = \int \left(\frac{1}{a} - \cos t \right) (1 - \theta \cos t)^{-\frac{1}{2}} \cos p t dt$. Quant aux autres termes, les formules de relation qui ont servi pour la premiere série, n'ont plus lieu pour celle-ci. Voici celle que je trouve qu'il faut y substituer.

Représentons en général les deux expressions du Paragraphe précédent par $(k - \cos t)(1 - \theta \cos t)^{m+1} \sin (p+1) t dt = V$. En différenciant on trouvera diff. $\left[(1 - \theta \cos t)^{m+1} \sin (p+1) t dt \right] (k - \cos t) + (1 - \theta \cos t)^{m+1} \sin (p+1) t \sin t dt = dV$. Or supposons que l'on cherche la relation des trois quadratures suivantes, $S' = \int (k - \cos t)(1 - \theta \cos t)^{m} \cos p t dt$, $P' = \int (k - \cos t)(1 - \theta \cos t)^{m} \cos (p+1) t dt$, $Q' = \int (k - \cos t)(1 - \theta \cos t)^{m} \cos (p+2) t dt$, le premier terme de notre différentielle renferme nécessairement les trois différentielles de S', P', Q'. Ainsi nous aurons, pour la premiere partie de la valeur de dV, $\frac{1}{2} \overline{p+1}\, dP' + \frac{1}{4} \theta (m - p) dS' - \frac{1}{4} \theta (p + m + 2) dQ'$. Mais le second terme $(1 - \theta \cos t)^{m+1} \sin (p+1) t \sin t dt$ de la différentielle nous donnera, pour la seconde, $(1 - \theta \cos t)^{m+1} \left(\frac{1}{2} \cos p t dt - \frac{1}{2} \cos (p+2) t dt \right)$, laquelle deviendra $\frac{1}{4} dS - \frac{1}{4} dQ$, en y faisant $m = -\frac{3}{2}$, & substituant, à la place de $(1 - \theta \cos t)^{m+1} \cos p t dt$ & de $(1 - \theta \cos t)^{m+1} \cos (p+2) t dt$, les différentielles dS, dQ des termes de la premiere série, correspondans aux termes S' & Q' de la seconde. Nous aurons donc, pour la valeur entiere de dV, $dV = \frac{1}{2} \overline{p+1}\, dP' + \frac{1}{4} \theta (m - p) dS' - \frac{1}{4} \theta (p + m + 2) dQ' + \frac{1}{4} dS - \frac{1}{4} dQ$; d'où l'on tire, en intégrant, V s'évanouissant, $Q' = \frac{2(p+1)P' + \theta(m-p)S' + S - Q}{(p+m+2)\theta}$,

ou, faisant $m = -\frac{5}{2}$, $Q' = \frac{4(p+1)P' - 2\theta(\frac{1}{2}+p)S' + 2S - 2Q}{(2p-1)\theta}$, expression générale pour tous les coefficiens D', E', F', &c. dans laquelle substituant, pour S', P', S, Q; B', C', B & D, on aura la valeur de D'. Quant au coefficient C', il faudra substituer, au lieu de S', P', S, Q; $2A'$, B', $2A$, B.

§. XVII.

Les relations des termes C', D', E', aux premiers seront donc $\frac{-4B' + 10A'\theta - 4A + 2C}{\theta} = C'$, $\frac{8C' - 7\theta B' + 2B - 2D}{\theta} = D'$, $\frac{+12D' - 9\theta C' + 2C - 2E}{3\theta} = E$. Celles des termes C°, D°, E°, de la troisieme série seront de même $\frac{-4B^\circ + 10A^\circ\theta - 4A + 2C}{\theta} = C^\circ$, $\frac{8C^\circ - 7\theta B^\circ + 2B - 2D}{\theta} = D^\circ$, $\frac{12D^\circ - 9\theta C^\circ + 2C - 2E}{3\theta} = E^\circ$.

§. XVIII.

Maintenant, pour calculer les coefficiens A' & B', A° & B°, on se servira de la méthode des quadratures, & on suivra les formes intégrales données au Paragraphe XVI : mais comme on ne demande pas dans ceux-ci une exactitude aussi rigoureuse que pour ceux de la premiere série, nous avons quarré ces courbes sur le principe du §. XIII, & que nous croyons avoir été celui de M. Euler.

Car, si on demande de quarrer l'espace $AMOV$ [*fig.* 4.], je partage l'axe AV en un certain nombre de parties égales AP, PQ, QT, &c. je tire les ordonnées AM, Pm, QN, &c. Je dis que, si ces ordonnées sont assez près les unes des autres pour que les secondes différences soient fort petites & négligeables, le rectangle $ARSQ$ plus le rectangle $QKLV$ sera la quadrature de l'espace $AMOV$.

Il ne s'agit donc que de prendre des ordonnées assez pro-

ches, pour que les fecondes différences foient négligeables.

M. Euler a trouvé que, fi on partage l'angle droit en 10 parties égales, on aura une exactitude fuffifante. Ainfi, faifant ici les parties AP, PQ, QT, &c. chacune de 9°, nous aurons très exactement les coefficiens A', B'.

D'ailleurs il faut bien remarquer que, quand les fecondes différences feroient affez fenfibles, la méthode feroit encore bonne; car on ne néglige pas même un douzieme de la fomme de ces fecondes différences. Dans la formule du §. II pour la quadrature d'un efpace parabolique, $\int y\,dx = a + \frac{1}{2}d - \frac{1}{12}d' + \frac{1}{24}d'' - \frac{19}{720}d'''$. Ainfi ce que nous négligeons eft la douzieme partie de la fomme des fecondes différences, moins la vingt-quatrieme partie de la fomme des troifiemes, plus $\frac{19}{720}$emes parties de la fomme des quatriemes.

§. XIX.

Il fuffira donc de calculer les ordonnées pour 9°, 27°, 45°, 63°, &c. au nombre de dix; & la fomme de ces ordonnées divifées par 10 donnera les premiers coefficiens A' & $A°$.

Enfuite les mêmes ordonnées, multipliées chacune par le cofinus t correfpondant, ou fucceffivement par les cofinus 9°, 27°, 45°, &c. étant ajoutées, & divifées par 5, donneront les feconds coefficiens B' & $B°$.

§. XX.

Quant à ces calculs fondamentaux, il eft très utile de les faire par deux méthodes différentes. Si les réfultats font les mêmes à-peu-près, c'eft une démonftration de leur exactitude. En conféquence, M. Clairaut [a] ayant trouvé les relations fuivantes, je m'en fuis fervi pour vérifier mes calculs.

[a] Ces relations n'ont jamais paru. M. Clairaut me les avoit communiquées quelque tems avant que de mourir. Je lui rends ici ce qui lui appartient.

Si on a les fonctions

$(1-\theta \cos t)^{-\frac{1}{2}} = A + B \cos t + C \cos 2t + D \cos 3t$, &c.

$(1-\theta \cos t)^{-\frac{3}{2}} = A^{\backprime} + B^{\backprime} \cos t + C^{\backprime} \cos 2t + D^{\backprime} \cos 3t$, &c.

on aura $A^{\backprime} = \frac{6A + B\theta}{6(1-\theta\theta)}$, $B^{\backprime} = \frac{B + 6A\theta}{3(1-\theta\theta)}$, $C^{\backprime} = \frac{-4B^{\backprime} + 10A^{\backprime}\theta}{\theta}$,

$D^{\backprime} = \frac{8C^{\backprime} - 7B^{\backprime}\theta}{\theta}$, $E^{\backprime} = \frac{12D^{\backprime} - 9C^{\backprime}\theta}{3\theta}$, $F^{\backprime} = \frac{16E^{\backprime} - 11D^{\backprime}\theta}{\theta}$.

De-là j'ai déduit ceux de la série suivante, $(\omega - \cos t)$
$(1-\theta\cos t)^{-\frac{5}{2}} = A' + B'\cos t + C'\cos 2t + D'\cos 3t +$ &c.

$$A' = \omega A^{\backprime} - \tfrac{1}{2} B^{\backprime} \qquad A^{\circ} = \frac{A'}{\omega} - \tfrac{1}{2} B^{\backprime}$$

$$B' = \omega B^{\backprime} - A^{\backprime} - \tfrac{1}{2} C^{\backprime} \qquad B^{\circ} = \frac{B'}{\omega} - A^{\backprime} - \tfrac{1}{2} C^{\backprime}$$

$$C' = \omega C^{\backprime} - \tfrac{1}{2} B^{\backprime} - \tfrac{1}{2} D^{\backprime} \qquad C^{\circ} = \frac{C'}{\omega} - \tfrac{1}{2} B^{\backprime} - \tfrac{1}{2} D^{\backprime}$$

$$D' = \omega D^{\backprime} - \tfrac{1}{2} C^{\backprime} - \tfrac{1}{2} E^{\backprime} \qquad D^{\circ} = \frac{D'}{\omega} - \tfrac{1}{2} C^{\backprime} - \tfrac{1}{2} E^{\backprime}$$

$$E' = \omega E^{\backprime} - \tfrac{1}{2} D^{\backprime} - \tfrac{1}{2} F^{\backprime} \qquad E^{\circ} = \frac{E'}{\omega} - \tfrac{1}{2} D^{\backprime} - \tfrac{1}{2} F^{\backprime}.$$

Le principe de ces relations est si aisé à trouver, que nous ne nous arrêterons point ici à le démontrer : nous mettrons seulement sous les yeux des Lecteurs la comparaison de quelques coefficiens trouvés de l'une & de l'autre maniere.

	A' *Premiere méthode.*	A' *Seconde méthode.*
Dist. du 3ᵉ au 4ᵉ . .	5,62071,	5,62765,
2ᵉ au 4ᵉ . .	1,09210,	1,09324,
3ᵉ au 2ᵉ . .	10,16590,	10,20303.

Ces différences sont peu considérables, sur-tout si l'on fait attention que ces coefficiens doivent être multipliés par une excentricité toujours au-dessous de 0,01, & par une masse qui n'ira jamais à 0,001, en supposant celle de Jupiter exprimée par l'unité. Cependant nous préférerons d'employer les coefficiens déterminés par la seconde méthode, comme étant

étant déduits de la relation aux coefficiens de la premiere série, fondés sur des quadratures plus rigoureuses.

§. XXI.

Il ne s'agit plus que de passer aux opérations arithmétiques, pour appliquer les déterminations précédentes.

Nous établirons les élémens des Satellites de Jupiter, tirés des Tables de M. Cassini.

	Dist. au centre de Jupiter.	*Mouvement diurne.*
Ier.	5,66667	203° 29′ 20″
IIe.	9,00000	101 22 28
IIIe.	14,33333	50 19 3
IVe.	25,33333.	21 34 16.

§. XXII.

Théorie du premier, sa distance à Jupiter étant 1.

La distance du

Ier. au IIe. $0{,}75513 + 1{,}22678 \cos t + 0{,}91086 \cos 2t + 0{,}64891 \cos 3t + 0{,}45183 \cos 4t + 0{,}31093 \cos 5t.$

Ier. au IIIe. $0{,}09027 + 0{,}10085 \cos t + 0{,}04835 \cos 2t + 0{,}02045 \cos 3t + 0{,}00407 \cos 4t.$

Ier. au IVe. $0{,}01255 + 0{,}00827 \cos t + 0{,}00235 \cos 2t + 0{,}00092 \cos 3t.$

Théorie du second, sa distance à Jupiter étant 1.

IIe. au Ier. $3{,}02529 + 4{,}91485 \cos t + 3{,}64918 \cos 2t + 2{,}59973 \cos 3t + 1{,}81016 \cos 4t + 1{,}24570 \cos 5t.$

IIe. au IIIe. $0{,}74305 + 1{,}20385 \cos t + 0{,}88800 \cos 2t + 0{,}78388 \cos 3t + 0{,}40980 \cos 4t + 0{,}23944 \cos 5t.$

IIe. au IVe $0{,}06062 + 0{,}06172 \cos t + 0{,}02756 \cos 2t + 0{,}01362 \cos 3t.$

Théorie du troisieme, sa distance à Jupiter étant 1.

IIIe. au Ier. $1{,}46074 + 1{,}63208 \cos t + 0{,}78238 \cos 2t + 0{,}33089 \cos 3t + 0{,}06598 \cos 4t.$

IIIe. au IIe. $3{,}00143 + 4{,}86277 \cos t + 3{,}58695 \cos 2t + 2{,}51514 \cos 3t + 1{,}65531 \cos 4t + 0{,}96717 \cos 5t.$

IIIe. au IVe. $0{,}42405 + 0{,}63691 \cos t + 0{,}42779 \cos 2t + 0{,}26136 \cos 3t + 0{,}13286 \cos 4t + 0{,}01823 \cos 5t.$

Théorie du quatrieme, sa distance à Jupiter étant 1.

IVe. au Ier. $1{,}11888 + 0{,}73910 \cos t + 0{,}20945 \cos 2t + 0{,}08216 \cos 3t.$

IVe. au IIe. $1{,}35204 + 1{,}37646 \cos t + 0{,}61463 \cos 2t + 0{,}30381 \cos 3t.$

IVe. au IIIe. $2{,}34129 + 3{,}51654 \cos t + 2{,}36295 \cos 2t + 1{,}44304 \cos 3t + 0{,}73353 \cos 4t + 0{,}10066 \cos 5t.$

§. XXIII.

Quant aux deux autres séries qui expriment la correction qu'il faut faire à la distance trouvée dans le §. précédent, en ayant égard dans celui-ci aux excentricités des deux Satellites, les voici, en supposant ces excentricités indéterminées; dans lesquelles il faut faire attention que e est toujours l'excentricité du Satellite troublé, & f celle du Satellite perturbateur.

Théorie du premier, sa distance à Jupiter étant 1.

Ier. au IIe. $-e \cos mv\,(-2{,}1150 - 4{,}2785 \cos t - 3{,}9699 \cos 2t - 3{,}5362 \cos 3t).$

Ier. au IIe. $-f \cos qs\,(+4{,}3933 + 7{,}9859 \cos t + 6{,}7271 \cos 2t + 5{,}3726 \cos 3t).$

Théorie du second, sa distance à Jupiter étant 1.

IIe. au Ier. $-e \cos mv\,(17{,}6011 + 31{,}9942 \cos t + 26{,}9510 \cos 2t + 21{,}5256 \cos 3t).$

IIe. au Ier. $-f\cos qs\,(-8{,}4734 - 17{,}141\ \cos t - 15{,}9045\cos 2t$
$- 14{,}167\ \cos 3t)$.

IIe. au IIIe. $-e\cos mv\,(-2{,}0729 - 4{,}1973\ \cos t - 3{,}8820\cos 2t$
$- 3{,}3567\cos 3t)$.

IIe. au IIIe. $-f\cos qs\,(+4{,}3001 + 7{,}8054\cos t + 6{,}5435\cos 2t$
$+ 5{,}2216\cos 3t)$.

Théorie du troisieme, sa distance à Jupiter étant 1.

IIIe. au IIe. $-e\cos mv\,(17{,}3690 + 31{,}5270\cos t + 26{,}430\ \cos 2t$
$+ 21{,}096\ \cos 3t)$.

IIIe. au IIe. $-f\cos qs\,(-8{,}3729 - 16{,}953\ \cos t - 15{,}680\ \cos 2t$
$- 13{,}558\ \cos 3t)$.

IIIe. au IVe. $-e\cos mv\,(-0{,}8646 - 1{,}7804\cos t - 1{,}5931\cos 2t$
$- 1{,}3065\cos 3t)$.

IIIe. au IVe. $-f\cos qs\,(+2{,}1312 + 3{,}6912\ \cos t + 2{,}8767\cos 2t$
$+ 2{,}1088\cos 3t)$.

Théorie du quatrieme, sa distance à Jupiter étant 1.

IVe. au IIIe. $-e\cos mv\,(11{,}795 + 20{,}380\cos t + 15{,}883\cos 2t$
$+ 11{,}643\cos 3t)$.

IVe. au IIIe. $-f\cos qs\,(-4{,}7707 - 9{,}8301\cos t - 8{,}7967\cos 2t$
$-7{,}2133\ \cos 3t)$.

§. XXIV.

Je n'ai calculé ici que les corrections nécessaires. Quant aux autres qui doivent entrer dans la détermination du mouvement de l'apside, détermination qui est très délicate, je vais ajouter tous les coefficiens essentiels pour donner à cet élément l'exactitude requise, supposant toujours la distance du Satellite troublé à Jupiter égale à l'unité.

Théorie du premier.

Ier. au IIIe. . . $-e\cos mv\,(-0{,}0736 - 0{,}1711\cos t)$.

Ier. au IIIe. . . $-f\cos qs\,(0{,}3446 + 0{,}4747\cos t)$.

Ier. au IVe. . . $-e \cos mv(-0,00296-0,00989 \cos t)$.
Ier. au IVe. . . $-f \cos qs(0,0406+0,0345 \cos t)$.

Théorie du second.

IIe. au IVe. . . $-e \cos mv(-0,0388-0,0951 \cos t)$.
IIe. au IVe. . . $-f \cos qs(+0,2207+0,2802 \cos t)$.

Théorie du troisieme.

IIIe. au Ier. . . $-e \cos mv(5,7765+7,682 \cos t)$.
IIIe. au Ier. . . $-f \cos qs(-1,1919-2,7688 \cos t)$.

Théorie du quatrieme.

IVe. au Ier. . . $-e \cos mv(3,6360+3,1034 \cos t)$.
IVe. au Ier. . . $-f \cos qs(-0,2642-0,8839 \cos t)$.
IVe. au IIe. . . $-e \cos mv(4,9219+6,2493 \cos t)$.
IVe. au IIe. . . $-f \cos qs(-0,8659-0,2121 \cos t)$.

SECONDE SECTION.

PROBLÊME I.

Un corps étant mu par deux forces, dont l'une $\frac{M}{rr}+\varphi$ pouſſe vers le centre T, & l'autre π agit dans une direction perpendiculaire à la premiere, trouver, 1°. la courbe décrite par ce corps autour du centre T; 2°. la relation entre l'angle que le corps eût décrit ſans les forces perturbatrices, & l'angle qu'il décrit en vertu des forces perturbatrices.

Soit que le corps perturbateur, qui produit les forces φ & π, décrive une orbite intérieure ou extérieure à l'égard de celle que décrit le corps troublé.

En ſuppoſant que l'orbite du Satellite troublé eût été une ellipſe, ſi les forces perturbatrices n'avoient pas agi, & que l'orbite du Satellite perturbateur ſoit circulaire.

§. XXV.

Soit $SI \cdot \cdot b$ diſtance moy. d'un Sat. extérieur quelconque ;
$LT \cdot \cdot a$ diſtance moy. d'un Sat. intérieur quelconque ;
$\frac{a}{b} = \omega$;
z la longitude moy. du Satellite perturbateur ;
x la longitude moy. du Satellite troublé,
v ſa longitude vraie ;
$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p} \operatorname{cof} v$ équation de l'orbite primitive,
$\frac{1}{L} = \frac{1}{k} - \frac{e}{k} \operatorname{cof} mv$ équation de l'orbite connue par les obſervations ;
t l'élongation, ou la différence des longitudes moyennes des deux Satellites ;
M ſomme des maſſes de Jupiter & du Satellite troublé, faite égale à l'unité ;
O maſſe du Satellite perturbateur.

§. XXVI.

Nous reprendrons les forces perturbatrices déterminées dans la premiere Partie, §. I.

Leſquelles, dans le cas des perturbations d'un Satellite extérieur, ſeront $\varphi = -O.SI\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{SI^3}\right) \operatorname{cof} t + \frac{O.LI}{SL^3}$,

$$\pi = -O.SI\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{SI^3}\right) \operatorname{fin} t;$$

ou

$$\varphi = -O\left(\frac{1}{\omega SL^3} - \omega^2\right) \operatorname{cof} t + \frac{Or}{SL^3},$$

$$\pi = -O\left(\frac{1}{\omega SL^3} - \omega^2\right) \operatorname{fin} t.$$

Dans le cas des perturbations d'un Satellite intérieur,

$$\varphi = -O.LI\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{LI^3}\right)\text{cos}\,t + \frac{O.SI}{SL^3},$$

$$\pi = O.LI\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{LI^3}\right)\text{sin}\,t;$$

ou . . $$\varphi = -O\left(\frac{\omega}{SL^3} - \frac{1}{\omega^2}\right)\text{cos}\,t + \frac{Or}{SL^3},$$

$$\pi = O\left(\frac{\omega}{SL^3} - \frac{1}{\omega^2}\right)\text{sin}\,t.$$

§. XXVII.

$SL^{-3} = A + B\,\text{cos}\,t + C\,\text{cos}\,2t + D\,\text{cos}\,3t + E\,\text{cos}\,4t + F\,\text{cos}\,5t + e\,\text{cos}\,mv\,(A' + B'\,\text{cos}\,t + C'\,\text{cos}\,2t + D'\,\text{cos}\,3t + E'\,\text{cos}\,4t$, &c.), ou $SL^{-3} = A + B\,\text{cos}\,t + C\,\text{cos}\,2t + D\,\text{cos}\,3t + E\,\text{cos}\,4t + F\,\text{cos}\,5t + A'e\,\text{cos}\,mv + \frac{1}{2}B'e\,\text{cos}(t - mv) + \frac{1}{2}C'e\,\text{cos}(2t - mv) + \frac{1}{2}D'e\,\text{cos}(3t - mv)$, la valeur des coefficiens A, B, C, D, &c. A', B', C', &c. étant données par les §. XXII & XXIII.

§. XXVIII.

Nous supposerons l'ellipse que décrit maintenant le Satellite connue par l'observation. Ainsi, dans l'équation $\frac{1}{r} = \frac{1}{k} - \frac{e}{k}\,\text{cos}\,mv$, faisant $k = 1$, on aura $\frac{1}{r} = 1 - e\,\text{cos}\,mv$, e étant une fraction assez petite pour que l'on puisse en négliger les secondes puissances. Ainsi nous aurons $r = 1 + e\,\text{cos}\,mv$, $r^2 = 1 + 2e\,\text{cos}\,mv$, $r^3 = 1 + 3e\,\text{cos}\,mv$, $\frac{rdr}{dv} = -em\,\text{sin}\,mv$.

§. XXIX.

L'expression du tems dans cette orbite sera $\frac{1}{\sqrt{pM}}\left(v + \frac{2e}{m}\,\text{sin}\,mv\right)$. L'expression du tems dans l'orbite du Satellite perturbateur sera, en représentant le rayon de cette orbite par f, $\frac{f^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}}(v \pm t)$.

Egalant ces deux expreſſions $\frac{1}{\sqrt{pM}}\left(v+\frac{2e}{m}\,\text{ſin}\, m v\right)=\frac{f^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{M}}(v \pm t)$, & faiſant $\frac{1}{\sqrt{pf^3}}=1 \pm n$, on aura $v \pm t=(1 \pm n)\left(v+\frac{2e}{m}\,\text{ſin}\, m v\right.$, ou $t=n v \pm(1 \pm n) \frac{2e}{m}\,\text{ſin}\, m v$; $+$, pour les perturbations d'un Satellite intérieur; $-$, pour celle d'un Satellite extérieur, le mouvement moyen du Satellite perturbateur étant au mouvement moyen du Satellite troublé, comme $1 \pm n$ eſt à 1.

§. XXX.

Cas des perturbations d'un Satellite extérieur.

$$\text{Sin}\, t=\text{ſin}\, n v+\frac{(1-n) e}{m}\,\text{ſin}\,(n-m) v, \text{ [a]}$$

$$\text{ſin}\, 2 t=\text{ſin}\, 2 n v+\frac{2(1-n) e}{m}\,\text{ſin}\,(2 n-m) v,$$

$$\text{ſin}\, 3 t=\text{ſin}\, 3 n v+\frac{3(1-n) e}{m}\,\text{ſin}\,(3 n-m),$$

$$\text{coſ}\, t=\text{coſ}\, n v+\frac{(1-n) e}{m}\,\text{coſ}\,(n-m) v,$$

$$\text{coſ}\, 2 t=\text{coſ}\, 2 n v+\frac{2(1-n) e}{m}\,\text{coſ}\,(2 n-m) v,$$

$$\text{coſ}\, 3 t=\text{coſ}\, 3 n v+\frac{3(1-n) e}{m}\,\text{coſ}\,(3 n-m) v.$$

§. XXXI.

Cas des perturbations d'un Satellite intérieur.

$$\text{Sin}\, t=\text{ſin}\, n v-\frac{(1+n) e}{m}\,\text{ſin}\,(n-m) v,$$

$$\text{ſin}\, 2 t=\text{ſin}\, 2 n v-\frac{2(1+n) e}{m}\,\text{ſin}\,(2 n-m) v,$$

$$\text{ſin}\, 3 t=\text{ſin}\, 3 n v-\frac{3(1+n) e}{m}\,\text{ſin}\,(3 n-m) v,$$

[a] Nous négligerons toujours les termes ſinus & coſinus $(1+m) v$, $(2+m) v$, &c. parceque les coefficiens deviennent trop petits après l'intégration.

$$\cos t = \cos n v - \frac{(1+n)e}{m} \cos(n-m)v,$$

$$\cos 2t = \cos 2nv - \frac{2(1+n)e}{m} \cos(2n-m)v,$$

$$\cos 3t = \cos 3nv - \frac{3(1+n)e}{m} \cos(3n-m)v,$$

négligeant tous les termes qui dépendent de sinus & cosinus $(n+m)v$, $(2n+m)v$, &c. comme devant être trop petits après les intégrations.

§. XXXII.

Détermination des forces φ & π dans le cas des perturbations d'un Satellite extérieur.

PREMIERE PARTIE DE LA FORCE φ.

$$-O\left(\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega}\cos t + \frac{C}{\omega}\cos 2t + \frac{D}{\omega}\cos 2t + \frac{E}{\omega}\cos 4t + \frac{F}{\omega}\cos 5t\right)\cos t$$
$$+ O(A + B\cos t + C\cos 2t + D\cos 3t + E\cos 4t + F\cos 5t)(1 + e\cos mv);$$ ou

$$-O\left\{\begin{array}{lllll}
\frac{B}{2\omega} & +\frac{A}{\omega}\cos t & +\frac{B}{2\omega}\cos 2t & +\frac{C}{2\omega}\cos 3t & -\frac{1}{2}Be\cos(t-mv) - Ae\cos mv. \\
 & \quad\frac{C}{2\omega} & \quad\frac{D}{2\omega} & \quad\frac{E}{2\omega} & -\frac{1}{2}Ce\cos(2t-mv) \\
-A & -B & -C & -D & -\frac{1}{2}De\cos(3t-mv) \\
 & -\omega^2 & & &
\end{array}\right.$$

Faisant $A - \frac{B}{2\omega} = A''$, $B + \omega^2 - \frac{A}{\omega} - \frac{C}{2\omega} = B''$, $C - \frac{B+D}{2\omega} = C''$, $D - \frac{C+E}{2\omega} = D''$, on aura la premiere partie de la force φ égale à $O\Big(A'' + B''\cos t + C''\cos 2t + D''\cos 3t + Ae\cos mv + \frac{1}{2}Be\cos(t-mv) + \frac{1}{2}Ce\cos(2t-mv) + \frac{1}{2}De\cos(3t-mv)\Big)$.

SECONDE

SECONDE PARTIE DE LA FORCE φ.

$$-O\left(\frac{A'e}{\alpha}\cos mv+\frac{B'e}{2\alpha}\cos(t-mv)+\frac{C'e}{2\alpha}\cos(2t-mv)+\frac{D'e}{3\alpha}\cos(3t-mv)\right)\cos t,\ +O\left(A'e\cos mv+\tfrac{1}{2}B'e\cos(t-mv)+\tfrac{1}{2}C'e\cos(2t-mv)+\tfrac{1}{2}D'e\cos(3t-mv)\right),$$ ou

$$-O\left\{\begin{array}{llll}\frac{B'e}{2\alpha}\cos mv & +\frac{A'e}{2\alpha}\cos(t-mv) & +\frac{B'e}{2\alpha}\cos(2t-mv) & +\frac{C'e}{2\alpha}\cos(3t-mv. \\ -A'e & +\frac{C'e}{4\alpha} & -\frac{1}{2}C'e & -\frac{1}{2}D'e \\ & -\frac{1}{2}B'e & +\frac{D'e}{4\alpha} & +\frac{E'e}{4\alpha}\end{array}\right.$$

Il faut maintenant ſubſtituer dans ces deux parties de la valeur de la force φ, pour $\cos t$, $\cos 2t$, $\cos 3t$, leurs valeurs trouvées §. XXX : mais dans les termes où entre l'excentricité e, il ſuffira de mettre, pour t, ſa valeur nv, en négligeant le terme $\frac{(1-n)e}{m}\sin mv$, qui introduiroit le quarré de l'excentricité.

Ces valeurs de $\cos t$, $\cos 2t$, $\cos 3t$, donneront les termes ſuivans,

$$B''\cos nv+\frac{(1-n)B''e}{m}\cos(n-m)v,$$

$$C''\cos 2nv+\frac{2(1-n)C''e}{m}\cos(2n-m)v,$$

$$D''\cos 3nv+\frac{3(1-n)D''e}{m}\cos(3n-m)v.$$

Faiſant $A'-\frac{B'}{2\alpha}+A=E''$, $\frac{1}{2}B-\frac{A'}{2\alpha}-\frac{C'}{4\alpha}+\frac{1}{2}B'+\frac{(1-n)B''}{m}=F''$, $\frac{1}{2}C+\frac{2C''(1-n)}{m}+\frac{1}{2}C-\frac{B'+D'}{4\alpha}=G''$, $\frac{1}{2}D+\frac{3D''(1-n)}{m}+\frac{1}{2}D'-\frac{C'+E'}{4\alpha}=H''$, on aura donc la valeur générale de φ, $O[A''+B''\cos nv+C''\cos 2nv+D''\cos 3nv+E''e\cos mv+F''e\cos(n-m)v+G''e\cos(2n-m)v+H''e\cos(3n-m)v]$.

PREMIERE PARTIE DE LA FORCE DE π.

$$\pi = -O \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega} \cos t + \frac{C}{\omega} \cos 2t + \frac{D}{\omega} \cos 3t + \frac{E}{\omega} \cos 4t + \frac{F}{\omega} \cos 5t \\ -\omega^2 \end{array} \right\} \sin t,$$

$$\pi = -O \left\{ \begin{array}{lll} \frac{A}{\omega} \sin t + & \frac{B}{2\omega} \sin 2t + & \frac{C}{2\omega} \sin 3t. \\ -\omega^2 & -\frac{D}{2\omega} & -\frac{E}{2\omega} \\ -\frac{C}{2\omega} & & \end{array} \right\}$$

Faisant $\omega^2 + \frac{C}{2\omega} - \frac{A}{\omega} = A'''$, $\frac{D-B}{2\omega} = B'''$, $\frac{E-C}{2\omega} = C'''$, on aura la premiere partie de la valeur de π, $O\,(A''' \sin t + B''' \sin 2t + C''' \sin 2t)$.

SECONDE PARTIE DE LA FORCE π.

$-O\left(\frac{A'e}{\omega} \cos mv + \frac{1}{2} B'e \cos(t - mv) + \frac{1}{2} C'e \cos(2t - mv) + \frac{1}{2} D'e \cos(3t - mv)\right) \sin t$, ou

$$-O \left\{ \begin{array}{lll} \frac{A'e}{2\omega} \sin(t - mv) + & \frac{B'e}{4\omega} \sin(2t - mv) + & \frac{C'e}{4\omega} \cos(3t - mv). \\ -\frac{C'e}{4\omega} & -\frac{D'e}{4\omega} & -\frac{E'e}{4\omega} \end{array} \right.$$

On aura de plus les termes suivans [a],

$$A''' \sin nv + \frac{(1-n)A'''e}{m} \sin(n-m)v,$$

$$B''' \sin 2nv + \frac{2(1-n)B'''e}{m} \sin(2n-m)v,$$

$$C''' \sin 3nv + \frac{3(1-n)C'''e}{m} \sin(3n-m)v.$$

Donc faisant $\frac{C'}{4\omega} + \frac{(1-n)A'''}{m} - \frac{A'}{2\omega} = D'''$, $\frac{D'-B'}{4\omega} + \frac{2(1-n)B'''}{m} = E'''$, $\frac{E'-C'}{4\omega} + \frac{3(1-n)C'''}{m} = F'''$, la valeur générale de π sera $O\,[A''' \sin nv + B''' \sin 2nv + C''' \sin 3nv + D'''e \sin(n-m)v + E'''e \sin 2n - m)v + F'''e \sin(3n - m)v]$.

[a] En mettant, pour sin t, $2t$, $3t$, leurs valeurs.

§. XXXIII.

Détermination des forces φ & π dans le cas des perturbations dues à un Satellite intérieur.

En faisant $A - \frac{1}{2} B\omega = A''$, $B + \frac{1}{\omega^2} - A\omega - \frac{1}{2} C\omega = B''$, $C - \frac{1}{2}(B + D)\omega = C''$, $D - \frac{1}{2}(C + E)\omega = D''$, $A + A' - \frac{1}{2} B'\omega = E''$, $-\frac{(1+n)B''}{m} + \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} A'\omega - \frac{1}{4} C\omega + \frac{1}{2} B' = F''$, $-\frac{(1+n)2C''}{m} + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} C' - \frac{1}{4}(B' + D')\omega = G''$, $-\frac{(1+n)3D''}{m} + \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} D' - \frac{1}{4}(C' + E')\omega = H''$, $\frac{1}{2} A'\omega - \frac{1}{4} C\omega - \frac{A'''(1+n)}{m} = D'''$, $\frac{1}{4}(B' - D')\omega - \frac{2B'''(1+n)}{m} = E'''$, $\frac{1}{4}(C' - E')\omega - \frac{3C'''(1+n)}{m} = F'''$, $A\omega - \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{2} C\omega = A'''$, $\frac{1}{2} B\omega - \frac{1}{2} D\omega = B'''$, $\frac{1}{2} C\omega - \frac{1}{2} E\omega = C'''$, on aura, de même que dans le Paragraphe précédent, $\varphi = [A'' + B''\cos nv + C''\cos 2nv + D''\cos 3nv + E''e\cos mv + F''e\cos(n - m)v + G''e\cos(2n - m)v + H''e\cos(3n - m)v]$, $\pi = O\,[A'''\sin nv + B'''\sin 2nv + C'''\sin 3nv + D'''e\sin(n - m)v + E'''e\sin(n - m)v + F'''e\sin(3n - m)v]$.

§. XXXIV.

Maintenant pour avoir la valeur de ϱ, il ne s'agit plus que de substituer dans $\int\frac{\pi r^3 dv}{\sqrt{pM}}$, pour π & r^3, leurs valeurs données dans les §. XXVIII & XXXIII. On aura donc $\int\frac{\pi r^3 dv}{\sqrt{pM}} =$

$$\frac{O}{\sqrt{pM}}\int\left\{\begin{matrix} A'''\sin nv + B'''\sin 2nv + D'''e\sin(n-m)v + E'''e\sin(2n-m)v \\ + C'''\sin 3nv + \frac{3}{2} A'''e \qquad\qquad + \frac{3}{2} B'''e \\ \qquad\qquad + F'''e\sin(3n-m)v \\ \qquad\qquad + \frac{3}{2} C'''e \end{matrix}\right\} dv.$$

Donc $\varrho = -O \left\{ \begin{array}{l} \frac{A'''}{np} \cos nv + \frac{B'''}{2np} \cos 2nv + K'''e \cos(n-m)v \\ \qquad\qquad + \frac{C'''}{3np} \cos 3nv \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} + L'''e \cos(2n-m)v \\ + M'''e \cos(3n-m)v \\ \qquad - P \end{array} \right\}$, en faisant $\frac{D''' + \frac{1}{2}A'''}{p(n-m)} = K'''$,

$\frac{E''' + \frac{1}{2}B'''}{p(2n-m)} = L'''$, $\frac{F''' + \frac{1}{2}C'''}{p(3n-m)} = M'''$, $\frac{A'''}{np} + \frac{B'''}{2np} + \frac{C'''}{3np} + K'''e$ $+ L'''e + M'''e = P$, P étant la constante ajoutée en intégrant.

§. XXXV.

Quant à $\Omega = \frac{\varphi r^2}{M} + \frac{\pi r dr}{M dv} - 2\varrho$, en substituant les valeurs de φ, π, r^2, $\frac{rdr}{dv}$, ϱ, on aura les quantités suivantes,

$O \left\{ \begin{array}{l} A'' + B'' \cos nv + C'' \cos 2nv + E''e \cos mv + F''e \cos(n-m)v \\ \qquad\qquad + D'' \cos 3nv + 2A''e \qquad + B''e \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} + G''e \cos(2n-m)v + H''e \cos(3n-m)v \\ + C''e \qquad\qquad + D''e \end{array} \right\}$, $O\left(-\frac{1}{2}A'''e\right.$ $\left.\cos(n-m)v - \frac{1}{2}B'''e \cos(2n-m)v - \frac{1}{2}C'''e \cos(3n-m)v\right)$,

$O \left\{ \begin{array}{l} \frac{2A'''}{pn} \cos nv + \frac{B'''}{pn} \cos 2nv + 2K'''e \cos(n-mv) \\ \qquad\qquad + \frac{2C'''}{3pn} \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} + 2L'''e \cos(2n-m)v + 2M'''e \cos(3n-m)v \\ \qquad\qquad - 2P \end{array} \right\}$: & en

faisant $\frac{\left(B'' + \frac{2A'''}{n}\right)}{nn-1} = K$, $\frac{\left(C'' + \frac{B'''}{pn}\right)}{4nn-1} = Q$, $\frac{\left(D'' + \frac{2C'''}{3pn}\right)}{9nn-1} = R$,

$\frac{(2A'' + E'')}{mm-1} = Z'''$, $\frac{(F'' + B'' - \frac{1}{2}A''' + 2K''')}{(n-m)^2 - 1} = Q'''$, $\frac{G'' + C'' - \frac{1}{2}B''' + 2L'''}{2(n-m)^2 - 1} =$ R''', $\frac{H'' + D'' - \frac{1}{2}C''' + 2M'''}{3(n-m)^2 - 1}$, on aura les termes suivans pour la

correction du rayon recteur, ou pour la valeur de Δ,

$$O\left\{\begin{array}{llll} A''-2P & +\mathrm{K}\operatorname{cof} v & -\mathrm{K}\operatorname{cof} nv & -Z'''e\operatorname{cof} mv - Q'''e\operatorname{cof}(n-m)v \\ & +Q & -Q\operatorname{cof} 2nv & -R''e\operatorname{cof}(2n-m)v \\ & +R & -R\operatorname{cof} 3nv & -S'''e\operatorname{cof}(3n-m)v \\ & +Z''' & & \\ & +Q''' & & \\ & +R''' & & \\ & +S''' & & \end{array}\right\}$$

§. XXXVI.

L'équation de l'orbite troublée sera donc $\frac{1}{r} = \frac{1+O(A''-2P)}{p}$
$-\left(\frac{c}{p}-\frac{O}{p}(\mathrm{K}+Q+R+Z'''e+Q'''e+R'''e+S'''e)\right)\operatorname{cof} v$

$$O\left\{\begin{array}{l} Z'''e\operatorname{cof} mv + \mathrm{K}\operatorname{cof} nv + Q'''e\operatorname{cof}(n-m)v \\ \qquad + Q\operatorname{cof} 2nv + R'''e\operatorname{cof}(2n-m)v \\ \qquad + R\operatorname{cof} 3nv + S'''e\operatorname{cof}(3n-m)v \end{array}\right\},$$

laquelle, comparée à l'équation de l'orbite déja connue $\frac{1}{r} = 1 - e\operatorname{cof} mv$, dans laquelle nous avons fait k, ou la distance moyenne égale à 1, si on excepte de la comparaison les six derniers termes qui appartiennent à l'ellipse troublée, donnera les relations suivantes, $1 + O(A''-2P) = p$, $\frac{c}{p} - \frac{O}{p}(\mathrm{K}+Q+R+Z'''e+Q'''e+R'''e+S'''e) = 0$, & $Z'''e = +e$, ou $Z''' = +1$, & enfin l'équation de l'orbite troublée

$$\frac{1}{r} = 1 - e\operatorname{cof} mv - \left\{\begin{array}{l} \mathrm{K}\operatorname{cof} nv + Q'''e\operatorname{cof}(n-m)v \\ Q\operatorname{cof} 2nv + R'''e\operatorname{cof}(2n-m)v \\ R\operatorname{cof} 3nv + S'''e\operatorname{cof}(3n-m)v \end{array}\right\} O.$$

Représentant ces six derniers termes par Ξ, on aura $\frac{1}{r} = 1 - e\operatorname{cof} mv + \Xi$, $r^2 = 1 + 2e\operatorname{cof} mv - 2\Xi + 3\Xi^2 - 6e\Xi\operatorname{cof} mv$, & $r^2(1-\varrho) = 1 + 2e\operatorname{cof} mv - 2\Xi + 3\Xi^2 - \varrho - (6e\Xi + 2e\varrho)\operatorname{cof} mv$.

§. XXXVII.

L'expreſſion du tems $\frac{1}{\sqrt{pM}}\int rr(1-\varrho)\,dv$ deviendra donc $\frac{1}{\sqrt{pM}}\int dv\,[1+2e\cos mv-2\Xi+3\Xi^2-\varrho-(6e\Xi+2e\varrho)\cos mv]$. Subſtituant les valeurs de Ξ & de ϱ, on aura à intégrer l'équation ſuivante, qui doit être multipliée par dv,

$$\begin{array}{l}1 \\ -PO \\ +\frac{1}{2}KKOO \\ +\frac{1}{2}QQOO \\ +\frac{1}{2}RROO\end{array} + \begin{array}{l}2e\cos mv \\ 2PeO\end{array} + \left\{\begin{array}{lll}2K\cos nv & +2Q\cos 2nv & +2R\cos 3nv \\ \frac{A'''}{pn} & \frac{B''}{2pn} & \frac{C'''}{3pn} \\ & [a]\ +\frac{1}{2}KKO & +\frac{1}{2}QQO\cos 4nv\end{array}\right\}O$$

$$\left\{\begin{array}{lll}+2Q'''e\cos(n-m)v & +2R'''e\cos(2n-m)v & +2S'''e\cos(3n-m)v \\ K'''e & L'''e & M'''e \\ 3Ke & 3Qe & 3Re \\ \frac{A'''e}{pn} & \frac{B'''e}{2pn} & \frac{C'''e}{3pn}\end{array}\right\}O.$$

Faiſant $\frac{2K}{n}+\frac{A'''}{pnn}=K'$, $\frac{2Q+\frac{B''}{2pn}+\frac{1}{2}KKO}{2n}=Q'$, $2R+\frac{C'''}{3pn}=R'$, $\frac{1}{2}QQO=T'$, $\frac{2Q'''+K'''+3K+\frac{B'''}{pn}}{n-m}=T'''$, $\frac{2R'''+L'''+3Q+\frac{B'''}{2pn}}{2n-m}=X'''$, $\frac{2S'''+M'''+3R+\frac{C'''}{3pn}}{3n-m}=Y''$, $PO-\frac{1}{2}OO(KK+QQ+RR)=\alpha$, on aura, après avoir intégré, $x=(1-\alpha)v+\frac{2e}{m}(1+PO)\sin mv$

$$+\left\{\begin{array}{l}K'\sin nv+T'''e\sin(n-m)v \\ Q'\sin 2nv+X'''e\sin(2n-m)v \\ R'\sin 3nv+Y'''e\sin(3n-m)v \\ T'\sin 4nv\end{array}\right\}O.$$

[a] Ces deux termes $\frac{1}{2}KKO$ & $\frac{1}{2}QQO$ doivent être, comme on le voit, multipliés par le quarré de la maſſe. Dans les premieres recherches, on n'aura pour objet que de déterminer la quantité de la maſſe : on pourra employer ſimplement $\frac{1}{2}KK$ & $\frac{1}{2}QQ$. Mais quand on voudra établir les équations de la théorie des Satellites, & ſur-tout celles du premier, il faudra que ces termes ſoient multipliés par le quarré de la maſſe.

Divisant toute l'équation par $1-\alpha$, il ne s'agira plus que de trouver la longitude vraie, exprimée par une fonction de la longitude moyenne. Mais comme il n'y aura tout au plus qu'un terme auquel il soit nécessaire de faire quelque correction, & que ce terme n'est pas le même pour la théorie de chaque Satellite, nous nommerons X, Z, Y, les trois termes que nous supposerons avoir été corrigés ainsi par le Paragr. V des principes établis au commencement de cet Ouvrage. Nous aurons donc

$$v = x - 2e\sin mx - O\left\{\begin{array}{l} X\sin nx + T'''e\sin(n-m)x \\ Z\sin 2nx + X'''e\sin(2n-m)x \\ Y\sin 3nx + Y'''e\sin(3n-m)x \\ T'\sin 4nx \end{array}\right\}.$$

PROBLÊME II.

Supposant que le Satellite troublé décrive un cercle, & que le Satellite perturbateur décrive une ellipse, trouver, 1°. la courbe décrite en vertu des perturbations, 2°. la relation entre la longitude vraie du Satellite troublé & sa longitude moyenne dans la nouvelle orbite qu'il décrit, soit que le Satellite perturbateur soit intérieur ou extérieur.

§. XXXVIII.

Soit 1 distance moyenne du Satellite troublé,
r rayon recteur de l'orbite troublée,
x mouvement propre du Satellite,
v angle du mouv. décrit en vertu des perturbations,
b distance moyenne du Satellite perturbateur,
z son rayon recteur,
s angle de son mouvement vrai,
f son excentricité,
$1-q$ mouvement de son apside.

§. XXXIX.

PREMIERE SOLUTION.

Cas des perturbations d'un Satellite intérieur.

L'équation de l'orbite d'un Satellite perturbateur sera $\frac{1}{z} = \frac{1}{b} - \frac{f}{b}\cos qs$, & l'expression du tems $\frac{b^2}{\sqrt{pM}}\left(s + \frac{2f}{q}\sin qs\right)$. Dans l'orbite circulaire du Satellite troublé, le tems sera exprimé par $\frac{1}{\sqrt{M}}v$. Donc $\frac{1}{\sqrt{M}}v = \frac{b^2}{\sqrt{pM}}\left(s + \frac{2f}{q}\sin qs\right)$. Faisant $\frac{\sqrt{p}}{b^2} = 1 + n$, *Rapport des moyens mouvemens.*

$$s = v + t,$$

$(1+n)v = v + t + \frac{2f}{q}\sin qs$. Donc $t = nv - \frac{2f}{q}\sin qs$.

§. XL.

On aura $SL^3 = A + B\cos t + C\cos 2t + D\cos 3t + E\cos 4t + F\cos 5t + f\cos q(1+n)v\,[A' + B'\cos t + C'\cos 2t + D'\cos 3t + E'\cos 4t$ *]; les forces

$$\varphi = -O\left(\frac{a}{SL^3} - \frac{1}{a^3}\right)\cos t + \frac{Or}{SL^3},$$

$$\pi = O\left(\frac{a}{SL^3} - \frac{1}{a^3}\right)\sin t;$$

$$\sin t = \sin nv + \frac{f}{q}\sin(n - q - nq)v,$$

$$\sin 2t = \cos 2nv + \frac{2f}{q}\sin(2n - q - nq)v,$$

$$\sin 3t = \sin 3nv + \frac{3f}{q}\sin(3n - q - nq)v,$$

$$\cos t = \cos nv + \frac{f}{q}\cos(n - q - nq)v,$$

$$\cos 2t = \cos 2nv + \frac{2f}{q}\cos(2n - q - nq)v,$$

$$\cos 3t = \cos 3nv + \frac{3f}{q}\cos(3n - q - nq)v.$$

* Nous appellons en général A', B', C'', &c. les coefficiens qui multiplient $e\cos mv$ & $f\cos qs$ · mais on a vu au §. XXIII, que ces deux quantités sont multipliées par deux suites différentes. On aura attention, lorsqu'on fera les substitutions arithmétiques, de prendre, pour A', B', C', les quantités relatives à $e\cos mv$, ou à $f\cos qs$.

Il y aura ici deux corrections ou additions à faire aux valeurs de φ & de π trouvées par le Problême : l'une, à cause des nouveaux termes ajoutés à l'expression de la fonction $S L^{-3}$; l'autre, à cause des nouveaux termes introduits dans la valeur de t.

§. XLI.

$$1.\ \textit{Cor. } \varphi.\ O\left\{\begin{array}{ll} A'f\cos q\,(1+nv) & +\tfrac{1}{2}B'f\cos(n-q-nqv) \\ -\tfrac{1}{2}B'\omega f & -\tfrac{1}{4}C'\omega f \\ & -\tfrac{1}{2}A'\omega f \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} +\tfrac{1}{2}C'f\cos(2n-q-nqv) & +\tfrac{1}{2}D'f\cos(3n-q-nqv) \\ -\tfrac{1}{4}B'\omega f & -\tfrac{1}{4}C'\omega f \\ -\tfrac{1}{4}D'\omega f & -\tfrac{1}{4}E'\omega f \end{array}\right\}.$$

$$2.\ \textit{Cor. } \varphi.\ \frac{B''f}{q}\cos(n-q-nqv)+\frac{2C''f}{q}\cos(2n-q-nqv) + \frac{3D''f}{q}\cos(3n-q-nqv).$$

Donc, faisant $A'-\frac{1}{2}B'\omega = N''$, $\frac{1}{2}B'-\frac{1}{2}A'\omega-\frac{1}{4}C'\omega+\frac{B''}{q} = K''$, $\frac{1}{2}C'-\frac{1}{4}B'\omega-\frac{1}{4}D'\omega+\frac{2C''}{q} = L''$, $\frac{1}{2}D'-\frac{1}{4}C'\omega-\frac{1}{4}E'\omega+\frac{3D''}{q} = M''$, on aura la correction de φ, $Of\,[N''\cos q\,(1+nv)+K''\cos(n-q-nqv)+L''\cos(2n-q-nqv)+M''\cos(3n-q-nqv)]$.

$$1.\ \textit{Cor. } \pi.\ O\left\{\begin{array}{ll} -\tfrac{1}{2}A'\omega f\sin(n-q-nqv) & -\tfrac{1}{4}B'\omega f\sin(2n-q-nqv) \\ +\tfrac{1}{4}C'\omega f & +\tfrac{1}{4}D'\omega f \\ & -\tfrac{1}{4}C'\omega f\sin(3n-q-nqv) \\ & -\tfrac{1}{4}E'\omega f \end{array}\right.$$

$$2.\ \textit{Cor. } \pi.\ \frac{A'''f}{q}\sin(n-q-nqv)+\frac{2B'''f}{q}\sin(2n-q-nqv) \quad [a] \quad +\frac{3C'''f}{q}\sin(3n-q-nqv).$$

Faisant $\frac{A'''}{q}-\frac{1}{2}A'\omega+\frac{1}{4}C'\omega = P''$, $\frac{2B'''}{q}-\frac{1}{4}B'\omega+\frac{1}{4}D'\omega = Q''$, $\frac{3C'''}{q}-\frac{1}{4}C'\omega+\frac{1}{4}E'\omega = R''$, la correction générale

[a] Ces deux corrections de φ & de π doivent aussi être censé multipliées par la masse O.

de π fera $Of[P''\sin(n-q-nqv+Q''\sin(2n-q-nqv)+R''\sin(3n-q-nqv)]$.

§. XLII.

On aura $\varrho = -Of\left(\frac{P''}{n-q-nq}\cos(n-q-nqv) + \frac{Q''}{2n-q-nq}\cos(2n-q-nqv) + \frac{R''}{3n-q-nq}\cos(3n-q-nqv)\right)$,

$$\Omega = \varphi - 2\varrho = Of\left\{\begin{matrix} N''\cos q(1+nv) + K''\cos(n-q-nqv) + L''\cos(2n-q-nqv) + M'\cos(3n-q-nqv) \\ \qquad + \frac{2P''}{n-q-nq} \qquad\qquad + \frac{2Q''}{2n-q-nq} \qquad\qquad + \frac{2R''}{3n-q-nq} \end{matrix}\right\}.$$

Donc, nommant $\frac{N''}{qq(1+n)^2-1} = X''$, $\frac{K''+\frac{2P''}{n-q-nq}}{(n-q-nq)^2-1} = S''$, $\frac{L''+\frac{2Q''}{2n-q-nq}}{(2n-q-nq)^2-1} = T''$, $\frac{M''+\frac{2R''}{3n-q-nq}}{(3n-q-nq)^2-1} = V''$; $\Xi = -[X''\cos q(1+nv) + S''\cos(n-q-nqv) + T''\cos(2n-q-nqv) + V''\cos(3n-q-nqv)]Of$.

§. XLIII.

La correction de l'expression du tems fera $-(2\Xi+\varrho)dv$,

$$Of\left\{\begin{matrix} 2X''\cos q(1+nv) + 2S''\cos(n-q-nqv) + 2T''\cos(2n-q-nqn) + 2S''\cos(3n-q-nqv) \\ \qquad + \frac{P''}{n-q-nq} \qquad\qquad + \frac{Q''}{2n-q-nqv} \qquad\qquad + \frac{R''}{3n-q-nqv} \end{matrix}\right\}.$$

Donc, intégrant, la correction de la longitude fera

$$-Of\left\{\begin{matrix} \frac{2X''}{q(1+n)}\sin q(1+nx) + \frac{2S''}{n-q-nq}\sin(n-q-nqx) + \frac{2T''}{2n-q-nq}\sin(2n-q-nqx) + \frac{2S''}{3n-q-nq}\sin(3n-q-nqx) \\ \qquad + \frac{P''}{(n-q-nq)^2} \qquad\qquad + \frac{Q''}{(2n-q-nq)^2} \qquad\qquad + \frac{R''}{(3n-q-nq)^2} \end{matrix}\right\}.$$

§. XLIV.

SECONDE SOLUTION.

Cas des perturbations d'un Satellite extérieur.

On a alors $t = nv + \frac{2f}{q} \sin q(1 - nv)$,

$$\sin t = \sin nv + \frac{f}{q} \sin(n - q - nq)v,$$

$$\sin 2t = \cos 2nv + \frac{2f}{q} \sin(2n - q - nq)v,$$

$$\sin 3t = \sin 3nv + \frac{3f}{q} \sin(3n - q - nq)v,$$

$$\cos t = \cos nv + \frac{f}{q} \cos(n - q - nq)v,$$

$$\cos 2t = \cos 2nv + \frac{2f}{q} \cos(2n - q - nq)v,$$

$$\cos 3t = \cos 3nv + \frac{3f}{q} \cos(3n - q - nq)v.$$

$$\varphi = -L\left(\frac{1}{\omega S L^3} - \omega^2\right) \cos t + \frac{L}{S L^3},$$

$$\pi = -L\left(\frac{1}{\omega S L^3} - \omega^2\right) \sin t.$$

§. XLV.

Correction de φ & de π.

$$1.\ Cor.\ \varphi.\ I \left\{ \begin{array}{llll} -\frac{B'}{2\omega} & -\frac{A'}{\omega}\cos t & -\frac{B'}{2\omega}\cos 2t & -\frac{C'}{2\omega}\cos 3t \\ +A' & -\frac{C'}{2\omega} & -\frac{D'}{2\omega} & -\frac{E'}{2\omega} \\ & +B' & +C' & +D' \end{array} \right\} fO \cos q(1 - nv)$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} A'f \cos q(1 - nv) & + \tfrac{1}{2}B' \cos(n - q + nqv) \\ -\frac{B'}{2\omega} & -\frac{A'}{2\omega} \\ & -\frac{C'}{4\omega} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ll} +\tfrac{1}{2}C' \cos(2n - q - nqv) & + \tfrac{1}{2}D' \cos(3n - q - nqv) \\ -\frac{B'}{4\omega} & -\frac{C'}{4\omega} \\ -\frac{D'}{4\omega} & -\frac{E'}{4\omega} \end{array} \right\} Of.$$

2. *Cor.* φ. $-Of\left(\frac{B''}{q}\cos(n-q+nqv)+\frac{2C''}{q}\cos(2n-q+nqv)\right.$ $\left.+\frac{3D''}{q}\cos(3n-q-nqv)\right.$.

Faisant $A'-\frac{B'}{2\omega}=N''$, $\frac{1}{2}B'-\frac{A'}{2\omega}-\frac{C'}{4\omega}-\frac{B''}{q}=K''$, $\frac{1}{2}C'-\frac{B'}{4\omega}-\frac{D'}{4\omega}-\frac{2C''}{q}=L''$, $\frac{1}{2}D'-\frac{C'}{4\omega}-\frac{E'}{4\omega}-\frac{3D''}{q}=M''$, on aura la correction générale de φ, $Of[N''\cos q(1-nv)+K''\cos(n-q+nqv)+L''\cos(2n-q+nv)+M''\cos(3n-q+nqv)]$.

1. *Cor.* π. $O\left\{\begin{matrix}-\frac{A'}{\omega}\sin t-\frac{B'}{2\omega}\sin 2t-\frac{C'}{2\omega}\sin 3t\\ +\frac{C'}{2\omega}\quad\quad +\frac{D'}{2\omega}\quad\quad +\frac{E'}{2\omega}\end{matrix}\right\}f\cos q(1-nv)$

$$=Of\left\{\begin{matrix}\frac{C'}{4\omega}\sin(n-q+nqv)+\frac{D'}{4\omega}\sin(2n-q+nqv)\\ -\frac{A'}{4\omega}\quad\quad\quad\quad -\frac{B'}{4\omega}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}+\frac{E'}{4\omega}\sin(3n-q+nqv)\\ -\frac{C'}{4\omega}\end{matrix}\right\}.$$

2. *Cor.* π. $-Of\left(\frac{A''}{q}\sin(n-q+nqv)+\frac{2B''}{q}\sin(2n-q+nqv)\right.$ $\left.+\frac{3C''}{q}\sin(3n-q+nqv)\right)$.

Faisant $\frac{C'}{4\omega}-\frac{A'}{2\omega}-\frac{A''}{q}=P''$, $\frac{D'-B'}{4\omega}-\frac{2B''}{q}=Q''$, $\frac{E'-C'}{4\omega}-\frac{3C''}{q}=R''$, correction générale de π, $Of[P''\sin(n-q+nqv)+Q''\sin(2n-q+nqv)+R''\sin(3n-q+nqv)]$. Donc correction de ϱ, $-Of\left(\frac{P''}{n-q+nq}\cos(n-q+nqv)\right.$ $\left.+\frac{Q''}{2n-q-nq}\cos(2n-q+nqv)+\frac{R''}{3n-q+nq}\cos(3n-q+nqv)\right)$.

§. XLVI.

On aura, en faisant $\dfrac{K''+\frac{2P''}{n-q+nq}}{(n-q+nq)^2-1}=S''$, $\dfrac{L''+\frac{2Q''}{2n-q+nq}}{(2n-q+nq)^2-1}$

$= T''$, $\dfrac{M'' + \dfrac{2R''}{3n - q + nq}}{(3n - q + nq)^2 - 1} = V''$, $\dfrac{N''}{qq(1-n)^2 - 1} = X''$,
correction de Ξ, $- Of\,[S'' \cos(n - q + nqv) + T'' \cos (2n - q + nqv) + V'' \cos(3n - q + nqv) + X'' \cos q(1 - nv)]$;
correction du tems ou de la longitude moyenne,

$$-Of\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2X''}{q(1-n)}\sin q(1-n) + \left(\dfrac{2S''}{n-q+nq} + \dfrac{P'}{(n-q+nq)^2}\right)\sin(n-q+nqv) \\ \qquad + \left(\dfrac{2T''}{2n-q+nq} + \dfrac{Q''}{(2n-q+nq)^2}\right)\sin(2n-q+nqv) \\ \qquad + \left(\dfrac{2V''}{3n-q+nq} + \dfrac{R''}{(3n-q+nq)^2}\right)\sin(3n-q+nqv).\end{array}\right\}$$

PROBLÊME III ET GÉNÉRAL

Un Satellite de Jupiter étant mu par les forces $\frac{M}{rr}$, φ, φ', φ'', qui poussent vers le centre de la planete, & par les forces π, π', π'', qui agissent dans une direction perpendiculaire à la premiere; trouver la courbe décrite par ce Satellite, & le tems employé à décrire un arc quelconque de cette courbe, en supposant, comme dans le Problême I, que tous les Satellites décrivent des cercles & sont dans le même plan.

Les forces φ, φ', φ'', π, π', π'' étant dues aux attractions des trois autres Satellites;

§. XLVII.

Soit [*fig.* 5.] la ligne Mm décrite par la seule force $\frac{M}{rr}$ qui fait circuler le Satellite autour du centre T de Jupiter; Mn celle que ce Satellite auroit décrite dans le second instant, sans les forces perturbatrices; no l'espace parcouru en vertu de l'action des forces φ, φ', φ''; enfin l'espace $o\mu$ parcouru en vertu des forces π, π', π'' : le côté $m\mu$ sera l'espace

parcouru par le corps M, dans le second instant, autour du centre T.

Je puis me représenter l'action des forces φ, φ', φ'', par celle d'une force Σ qui seroit égale à leur somme; & l'action des forces π, π', π'', par une autre force Π. Il est donc évident que ce Problême se trouve exactement le même que le Problême fondamental de la théorie de la Lune, & que les équations $r\,ddv + 2\,dr\,dv = \Pi\,dx^2$,

$$r\,dv^2 - ddr = \Sigma\,dx^2,$$

seront suffisantes pour parvenir à la solution de celui-ci, quand on aura fait $\Pi = \pi + \pi' + \pi''$, & $\Sigma = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \frac{M}{rr}$.

§. XLVIII.

Il s'ensuit de-là que les quantités $\varrho = \int \frac{\pi r^3 dv}{\sqrt{pM}}$ & $\Omega = \frac{\varphi rr}{M} + \frac{\pi dv}{M dv} - 2\varrho$ resteront les mêmes, pourvu qu'on y substitue, à la place de φ & de π, les sommes des forces $\varphi + \varphi' + \varphi''$ & $\pi + \pi' + \pi''$, dues à l'action des trois Satellites. Mais $r = 1$, $M = 1$: donc ϱ deviendra $\frac{1}{\sqrt{pM}}(\int \pi\,dv + \int \pi' dv + \int \pi'' dv)$, $\Omega = \varphi + \varphi' + \varphi'' - \frac{2}{\sqrt{pM}} \int \pi\,dv + \pi' dv + \pi'' dv$. D'où l'on voit que ϱ & Ω étant composés de la somme des mêmes quantités qu'on auroit trouvées en traitant les perturbations de chaque Satellite séparément, la quantité Δ, qui renferme les altérations du rayon recteur, ne sera composée de même que de la somme des altérations qu'on auroit eues séparément.

Ainsi le rayon recteur $r = 1 + \Xi + \Xi' + \Xi''$.

§. XLIX.

Alors prenant l'expression du tems $\int \frac{rr\,dv}{\sqrt{pM}}(1 - \varrho)$, on

aura, en substituant les valeurs de ϱ & de r,

$$\int \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2\Xi + 3\Xi^2 - \varrho \\ \quad + 2\Xi' + 3\Xi'^2 - \varrho' \\ \quad + 2\Xi'' + 3\Xi''^2 - \varrho'' \\ \quad + 2\Xi\Xi' \\ \quad + 2\Xi\Xi'' \\ \quad + 2\Xi'\Xi'' \end{array} \right\} \frac{dv}{\sqrt{\rho M}}.$$

Mais dans cette quantité, il n'y a que celle-ci $\int(2\Xi\Xi' + 2\Xi\Xi'' + 2\Xi'\Xi'')\frac{dv}{\sqrt{\rho M}}$, qui exprime les corrections qu'il faut ajouter à celles qu'ont donné les perturbations particulieres, pour avoir les équations qui ont lieu en considérant les perturbations réunies des trois Satellites.

§. L.

Mais les corrections précédentes sont trop étendues; car j'ai eu lieu de reconnoître qu'un Satellite n'est troublé sensiblement que par les deux Satellites les plus voisins; & l'action de l'autre est toujours si petite, qu'elle ne mérite pas d'entrer dans la considération présente. Ainsi, faisant $\Xi'' = 0$, nous aurons simplement $\int 2\Xi'\Xi\, dv$.

§. L I.

Supposant maintenant $\Xi = a \cos \delta v + b \cos 2\delta v$,

$\Xi' = a' \cos \lambda v$,

$2dv(\Xi\Xi') = [aa' \cos(\delta - \lambda)v + a'b \cos(2\delta - \lambda)v]\, dv$,

dont l'intégrale sera $\frac{aa'}{\delta - \lambda} \sin(\delta - \lambda)v + \frac{a'b}{2\delta - \lambda} \sin(2\delta - \lambda)v$.

Si l'on fait l'application de ces formules à la théorie du second Satellite, on trouverera des équations énormément gran-

des; car en déterminant δ & λ par les mouvemens diurnes on auroit $\delta = 0,5036459$,

$\lambda = 1,0073000$.

Donc $2\delta - \lambda = 0,0000082$. Et dans la troisieme Partie on trouvera que les coefficiens a' & b seront égaux à $0,02016$, $-0,01347$. Le terme $\frac{a'b}{2\delta - \lambda}$ sin $(2\delta - \lambda)v$ deviendroit donc $\frac{-0,0002715}{0,0000082}$ sin $(2\delta - \lambda)v = -33$ sin $(2\delta - \lambda)v$. Mais il faut observer que cette recherche est trop délicate pour déduire δ & λ des mouvemens diurnes. On verra dans la troisieme Partie, que 2δ est toujours égal à λ. Conséquemment le diviseur de l'équation précédente est nul: donc l'équation est infinie, & ne peut être employée.

Je n'examinerai point ce que peuvent devenir les autres équations produites dans la théorie des Satellites, par les Problêmes II & III; la matiere est trop vaste pour pouvoir embrasser tout à la fois. Il faut d'ailleurs que les excentricités & le mouvement de l'apside dont elles dépendent, soient connus très exactement, pour faire une comparaison générale de toutes les équations que donne la théorie avec les observations. Il y a lieu de penser qu'elles ne sont pas considérables, & qu'elles ne peuvent pas influer sur la détermination des masses. Il s'agit aujourd'hui de démêler les effets des causes principales. Quand il s'agira de perfectionner, j'entrerai dans le détail des plus petites perturbations, & je ferai usage de tous les fondemens que j'ai jettés ici.

§. LII.

Maintenant que l'on a calculé les perturbations particulieres, & déterminé la courbe qui en résulte pour l'orbite de chaque Satellite, il faudroit recommencer le calcul, en prenant

prenant, pour le rayon vecteur, & pour la longitude vraie, ce que donnent les Problêmes précédens, & déterminer de nouveau l'effet des perturbations sur l'orbite mieux connue. Mais la théorie des Satellites de Jupiter me semble trop peu avancée, pour demander ce degré de perfection. Notre principal objet doit être d'abord de déterminer les masses, ensuite de les perfectionner. C'est le terme où je dois rester aujourd'hui, & d'où je partirai, lorsque, par une seconde tentative, j'entrerai dans la route que je viens de tracer.

§. LIII.

Du mouvement de l'apside.

PROBLÊME IV.

J'ai fait voir dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, an. 1763, que, si l'on nomme r la distance du Satellite, y le rayon de l'équateur de Jupiter, cc la différence des quarrés des deux axes, & que l'on fasse $\delta = \frac{3c^2}{10y^2} + \frac{9c^4}{56y^4}$, &c. la gravité à la distance y du centre de Jupiter sera à la gravité à la distance r, comme $\frac{1}{yy}$ est à

$$\frac{1}{r^2}\left(1 - \delta + \frac{3c^2y^2}{10r^2} + \frac{9c^4y^4}{56r^4}\right) :: \frac{1}{yy} : \frac{1-\delta}{r^2}\left(1 + \frac{3c^2y^2}{10r^2} + \frac{9c^4y^4}{56r^4}\right).$$

$\frac{1-\delta}{r^2}\left(1 + \frac{3c^2y^2}{10r^2} + \frac{9c^4y^4}{56r^4}\right)$ [a] est donc la force centrale qui retient un Satellite quelconque dans son orbite. Mais comme la force $\frac{M}{rr}$, déduite des observations, dans laquelle M représente la masse de Jupiter, a été trouvée en supposant que la figure de cette planete étoit sphérique; il s'ensuit qu'on

[a] Si on vouloit une plus grande exactitude, on pourroit ajouter à cette suite le terme suivant, $\frac{5c^6y^6}{48r^6}$.

doit tirer la valeur de M de l'expreſſion précédente, en faiſant zero les quantités qui dépendent de l'applatiſſement de Jupiter. Ainſi, à la place de $1 - \delta$, nous pouvons donc mettre M, & nous aurons $\frac{M}{rr}\left(1 + \frac{3c^2y^2}{10r^2} + \frac{9c^4y^4}{56r^4}\right)$. Faiſant $\frac{3c^2y^2}{10} = \theta$, $\frac{9c^4y^4}{56} = \epsilon$, ou aura $\frac{M}{r^2} + \frac{M\theta}{r^4} + \frac{M\epsilon}{r^6}$.

§. LIV.

Prenant [page 10 de la théorie de la Lune] l'équation $\frac{f^2}{r^3} - \frac{f^2 ddr}{r^4 dv^2} + \frac{2f^2 dr^2}{r^5 dv^2} = \frac{\frac{M}{rr} + \varphi + \frac{\pi dr}{rdv}}{1 - 2\varrho}$, & mettant, à la place de $\frac{M}{rr}$, la nouvelle force centrale $\frac{M}{r^2} + \frac{M\theta}{r^4} + \frac{M\epsilon}{r^6}$, on aura $\frac{f^2}{r^3} - \frac{f^2 ddr}{r^4 dv^2} + \frac{2f^2 dr^2}{r^5 dv^2} = \frac{\frac{M}{rr} + \frac{M\theta}{r^4} + \frac{M\epsilon}{r^6} + \varphi + \frac{\pi dr}{rdv}}{1 + 2\varrho}$, ou $^{M}{}_{r}$ — $\frac{1}{dv^2}\left(d\left\{\frac{f^2 dr}{Mr}\right\}\right) = 1 + \Omega$, en faiſant Ω égal à $\frac{\theta}{r^2} + \frac{\epsilon}{r^4} + \frac{M\varphi}{r^2} + \frac{\pi rdr}{rdv} - 2\varrho$.

Faiſant enſuite $\frac{f^2}{Mr} = 1 + s$, on trouvera, comme M. Clairaut, $O = s + \frac{dds}{dv^2} + \Omega$. Or cette équation s'integre dans la théorie de la Lune, quelle que ſoit la fonction Ω. D'où il ſuit que, malgré les nouveaux termes introduits dans Ω, on aura toujours $\frac{p}{r} = 1 - g \sin v - c \cos v + \sin v \int \Omega\, dv \cos v - \cos v \int \Omega\, dv \sin v$, qui eſt l'équation de l'orbite troublée.

§. LV.

Les nouveaux termes θ & ϵ introduiront dans la valeur de Z''' [§. XXXV.] les quantités $-2\theta - 4\epsilon$: ainſi l'équation d'où l'on tirera le mouvement de l'apſide, étant [§. XXXVI.] $Z'''e = e$, on aura $\frac{2A'' + E'' - 2\theta - 4\epsilon}{mm - 1} = 1$,

& $m = \sqrt{1 + 2A'' + E'' - 2\theta - 4\varepsilon} = 1 + A'' + \frac{1}{2}E'' - \theta - 2\varepsilon$: d'où l'on déduira la valeur générale du mouvement de l'apſide, ſi l'on met ſucceſſivement, pour A'' & $\frac{1}{2}E''$, les valeurs relatives aux perturbations des trois Satellites voiſins.

Les termes θ & ε produiſent ſeuls un mouvement très conſidérable. J'ai fait voir qu'en ſuppoſant l'applatiſſement de Jupiter d'un dixieme, ce mouvement, joint à celui qui naît des perturbations du Soleil, étoit

pour le 4e. . . .		46′	55″	par an.
pour le 3e. . . .	5°	5′	20″	
pour le 1er. . . .	132°	0′	0″	

Ce mouvement n'eſt pas exact, parceque l'applatiſſement de Jupiter eſt moindre que je ne l'ai ſuppoſé. Mais ſi ce mouvement, déterminé avec toute l'exactitude néceſſaire, ne s'accordoit pas avec celui que donne l'obſervation, cela feroit voir que la denſité de Jupiter n'eſt pas uniforme.

PROBLÊME V.

Déterminer la force avec laquelle un ſphéroïde applati attire un corps qui circule dans le plan de ſon équateur.

En ſuppoſant que la denſité de ce ſphéroïde varie du centre à la ſuperficie, & que la loi de ces variations ſoit exprimée par R, qui eſt une fonction de la diſtance au centre y.

§. LVI.

Conſervant toutes les dénominations précédentes, & reprenant l'expreſſion de la force centrale $\frac{M}{rr}\left(1 + \frac{3c^2y^2}{10r^2} + \frac{9c^4y^4}{56r^4}\right)$, qui auroit lieu pour un corps placé à la diſtance r du corps attirant, lequel ſeroit d'une denſité uniforme ; nous mettrons d'abord, pour M, la quantité $\frac{2\varpi y^3}{3}$, qui repréſente l'attraction

d'une ſphere dont le rayon ſeroit y, ω étant le rapport du rayon à la circonférence; & nous aurons $\frac{1}{rr}\left(\frac{2\omega y^3}{3}+\frac{\omega c^2 y^5}{5r^2}+\frac{3c^4 y^7}{28r^4}\right)$. Différenciant l'équation, on aura, après l'avoir multipliée par R, qui eſt la denſité à la diſtance y, $\frac{1}{r^2}\left(2\omega y^2 dy+\frac{\omega c^2 y^4 dy}{r^2}+\frac{\frac{3}{4}c^4\omega y^6 dy}{r^4}\right)R$ pour l'attraction d'une couche infiniment mince.

§. LVII.

Suppoſons maintenant $R = 1 + y^p$: on aura $2\omega y^2 dy + 2\omega y^{p+2} dy + \frac{\omega c^2 y^4 dy}{r^2} + \frac{\omega c^2 y^{p+4} dy}{r^2} + \frac{3\omega c^4 y^6 dy}{4r^4} + \frac{3\omega c^4 y^{p+6} dy}{4r^4}$.
Intérant, on aura

$$\frac{2\omega y^3}{3}+\frac{2\omega y^{p+3}}{p+3}+\frac{\omega c^2 y^5}{5r^2}+\frac{\omega c^2 y^{p+5}}{(p+5)r^2}+\frac{3\omega c^4 y^7}{28r^4}+\frac{3\omega c^4 y^{p+7}}{4(p+7)r^4}, \text{ ou}$$

$$\frac{2\omega y^3}{3}\left[1+\frac{3y^p}{p+3}+\frac{3c^2y^2}{10r^2}+\frac{3c^2y^{p+2}}{2(p+5)r^2}+\frac{9c^4y^4}{56r^4}+\frac{9c^4y^{p+4}}{8(p+7)r^4}\right].$$

Faiſant $y=1$, & $\frac{2\omega y^3}{3}\left[1+\frac{3y^p}{p+3}\right]=M$, nous aurons

$$\frac{M}{rr}\left[1+\left(\frac{3c^2}{10r^2}+\frac{3c^2}{2(p+5)r^2}+\frac{9c^4}{56r^4}+\frac{9c^4}{8(p+7)r^4}\right)\frac{p+3}{p+6}\right].$$

§. LVIII.

Si on connoît exactement le mouvement de l'apſide d'un des Satellites, il ſervira à déterminer la valeur de p.

On commencera par évaluer le mouvement de l'apſide de ce Satellite, dû aux perturbations mutuelles, & aux perturbations du Soleil.

La ſomme de ces mouvemens calculés, retranchée de celui qui a été obſervé, donnera la quantité qui eſt due à la figure de Jupiter ſeule.

Soit donc m le mouvement de l'apſide du Satellite, produit par la figure de Jupiter.

Soit la différence des diametres de Jupiter δ : cc ſera $2\delta - \delta\delta$.

Dans la théorie de chacun des Satellites, nous prendrons pour l'unité, la diſtance moyenne de ce Satellite au centre de Jupiter : mais, comme ici l'expreſſion $2\delta - \delta\delta$ ſuppoſe que le rayon de l'équateur de Jupiter ait été pris pour l'unité, il faudra, pour réduire cc ou $2\delta - \delta\delta$ à cette nouvelle échelle, les diviſer par le quarré de la diſtance moyenne du Satellite au centre de Jupiter, meſurée en demi-diametres de cette planete.

Nous nommerons b la quantité cc, ou $2\delta - \delta\delta$, ainſi réduite.

Ce mouvement de l'apſide, dû à la figure de Jupiter, en ſuppoſant ſa denſité comme $1 + y^p$, ſera donc exprimé par $\frac{p+3}{p+6}\left(\frac{3b}{10} + \frac{3b}{2(p+5)} + \frac{9b^2}{28} + \frac{9b^2}{4(p+7)}\right)$.

J'ai meltiplié par 2 les deux derniers termes, parceque, comme on l'a vu au §. XXXVI, les modifications de ce genre dans la force centrale ajoutent à $\frac{M}{rr}$ deux nouveaux termes $\frac{M\theta}{r^4}$ & $\frac{M\epsilon}{r^4}$. Ces deux termes donnent à l'apſide un mouvement exprimé par $\theta + 2\epsilon$: j'ai dû par conſéquent multiplier par 2 le coefficient de $\frac{1}{r^4}$, afin d'avoir la quantité dont il influe dans le mouvement de l'apſide.

§. LIX.

On aura donc l'équation ſuivante

$$m = \frac{p+3}{p+6}\left(\frac{3b}{10} + \frac{3b}{2(p+5)} + \frac{9b^2}{28} + \frac{9b^2}{4(p+7)}\right),$$

$$\text{ou} \cdot \cdot \begin{array}{llll} + \frac{1}{10} b p^3 & + \frac{45}{10} b p^2 & + \frac{213}{10} b p & + \frac{115}{10} b = 0: \\ + \frac{9}{28} b^2 & + \frac{135}{28} b^2 & + 15 b & + \frac{945}{28} b^2 \\ - m & + \frac{3}{2} b & + 18 b^2 & + \frac{63}{2} b \\ & + \frac{9}{4} b^2 & + \frac{610}{28} b^2 & + \frac{135}{4} b^2 \\ & - 18 m & - 107 m & - 210 m \end{array}$$

équation du troiſieme degré, qui n'aura qu'une racine réelle & négative.

§. L X.

Soit la denſité comme $y^n + y^p$. Nous admettrons ici un terme de plus; &, au lieu de $\frac{M}{rr}\left(1 + \frac{3c^2y^2}{10r^2} + \frac{9c^4y^4}{56r^4}\right)$, nous prendrons $\frac{M}{rr}\left(1 + \frac{3c^2y^2}{10r^2} + \frac{9c^4y^4}{56r^4} + \frac{5c^6y^6}{48r^6}\right)$ [a] : & en ſuivant l'eſprit de la méthode précédente, on aura l'expreſſion ſuivante pour celle du mouvement de l'apſide d'un Satellite dont la diſtance au centre de Jupiter eſt r, la denſité de cette planete étant comme $y^n + y^p$: $\frac{(n+3)(p+3)}{(p+n+6)}\left(\frac{b}{2(n+5)} + \frac{b}{2(p+5)} + \frac{3b^2}{4(n+7)} + \frac{3b^2}{4(p+7)} + \frac{15b^3}{16(n+9)} + \frac{15b^3}{16(p+9)}\right)$.

Egalant cette expreſſion ſucceſſivement au mouvement de l'apſide obſervée des deux Satellites, & déterminant b pour chacun, ſuivant ce qui a été dit §. LVIII, on aura deux équations du quatrieme degré, dont les racines donneront les valeurs de p & de n.

§. L X I.

Si cette loi de la denſité ne donnoit pas un mouvement d'apſide qui s'accordât avec les mouvemens obſervés des quatre apſides, on pourroit ſuppoſer $R = y^n + y^p + y^m + y^z$: on obtiendroit une équation qui renfermeroit ces quatre inconnues, & qui, étant égalée ſucceſſivement aux quatre

[a] Voyez le Mémoire cité ci-deſſus, & le §. LIII.

mouvemens, donneroit les valeurs de n, p, m, t. Mais il seroit très possible que cette loi de la densité, qui représenteroit les mouvemens observés dans les apsides des quatre Satellites, ne fût pas conforme aux loix de l'Hydrostatique, nécessaires pour que l'équilibre subsiste entre les différentes parties de la planete originairement fluide.

Il est donc indispensable d'admettre parmi les équations qui doivent fixer ces indéterminées, celle qui est essentielle à cet équilibre.

Nous supposerons simplement que la densité soit comme $R = fy^p + gy^q$. M. Clairaut trouve dans sa Théorie de la Terre, pag. 209, que, *si l'on suppose qu'un sphéroïde composé d'une infinité de couches infiniment peu applaties ou allongées, dont les densités & les ellipticités soient exprimées par des fonctions données de la distance au centre, soit couvert d'un fluide homogene qui tourne avec lui dans un tems tel que la force centrifuge soit infiniment petite par rapport à la gravité*, la différence des axes sera exprimée par $\delta = \frac{6D - 6a^5\alpha + 15A\varphi + 5\varphi - 5a^5\varphi}{30A + 4 - 10a^5}$, δ étant la différence des axes, φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur, a le rayon du sphéroïde solide, & A & D ce que deviennent les quantités $\int R\,rr\,dr$ & $\int R\,d(r^5\varrho)$ lorsque $r = a$.

§. LXII.

Nous supposerons que toutes les ellipticités des couches sont égales, & nous aurons $\varrho = \delta$; que le fluide qui environne la planete a très peu de profondeur, & que conséquemment $a = 1$. Nous aurons alors $10A\delta - 2D = 5A\varphi$, qui est l'équation nécessaire entre la pesanteur, la force centrifuge & la différence des axes, pour qu'il y ait équilibre.

Subſtituant, pour R, ſa valeur, on aura $A = \frac{f}{3+p} + \frac{g}{3+q}$ & $D = 5\delta\left(\frac{f}{5+p} + \frac{g}{5+q}\right)$. On aura donc l'équation $10 A\delta - 2D = 5A\varphi$ changée en celle-ci

$$2\delta\left(\frac{f}{3+p} - \frac{g}{3+q} - \frac{f}{5+p} + \frac{g}{5+q}\right) = \frac{f\varphi}{3+p} + \frac{g\varphi}{3+q}.$$

§. LXIII.

On aura pour la partie du mouvement de l'apſide qui eſt due à la figure de Jupiter, $m = \frac{3(p+3)(q+3)}{f(q+3)+g(p+3)}\left(\frac{bf}{2(p+5)} + \frac{bg}{2(q+5)} + \frac{3b^2f}{4(p+7)} + \frac{3b^2g}{4(q+7)} + \frac{15b^2f}{16(p+9)} + \frac{15b^2g}{16(p+9)}\right)$, en conſervant à b la valeur du §. LVIII.

§. LXIV.

En prenant pour m les mouvemens d'apſide obſervés dans la théorie des trois Satellites, on auroit trois équations qui, jointes à celles du Paragraphe précédent, ſerviroient à fixer la valeur des quatre indéterminées ; mais le calcul en ſeroit ſi laborieux, que je n'ai pas oſé l'entreprendre aujourd'hui. Il eſt viſible d'ailleurs, que cette recherche demande beaucoup de ſoin, parceque pouvant varier la forme de la loi de la denſité preſque à volonté, il en naîtroit une infinité d'hypotheſes, entre leſquelles il faudroit choiſir celle qui ſeroit la plus conforme à la nature.

§. LXV.

Peut-être ſera-t-il poſſible d'établir une loi plus ſimple ; car, ſuppoſé que l'obſervation eût fait connoître que le mouvement

de

de l'apſide déduit de la figure de Jupiter eſt de 17° par an dans la théorie du ſecond Satellite, & preſque nul dans celle du quatrieme ; je remarque que, ſi le mouvement de l'apſide eſt dû en général aux deux derniers termes de l'équation du Paragr. LXIII, ce mouvement variera, dans les différentes théories, en raiſon inverſe de la ſixieme puiſſance des diſtances moyennes des Satellites. A l'égard du ſecond & du quatrieme, ce ſera donc en raiſon des ſixiemes puiſſances de 25, 3 & de 9. D'où l'on voit que le mouvement de l'apſide du ſecond pourra être de 17°, ſans que celui du quatrieme ſoit fort ſenſible. C'eſt ce qui aura lieu, ſi p a une valeur négative qui ne s'éloigne pas beaucoup de 9. Alors le terme dont le diviſeur eſt $p+9$ ſera très grand, tandis que les autres ſeront aſſez petits & négligeables pour une premiere détermination. Alors ſuppoſant $q=0$ & $f=1$, on déterminera p & g par les deux équations ſuivantes,

$$m = \frac{9(p+3)}{pg+3g+3}\left(\frac{25 b^3}{16(p+9)} + \frac{25 b^3 g}{144}\right),$$

$$2\delta\left(\frac{1}{3+p} + \frac{2}{5}g - \frac{1}{5+p}\right) = \frac{\varphi}{3+p} + \frac{1}{3}g\varphi,$$

Nous remettrons cette recherche à un autre tems. Il nous ſuffit d'avoir fait voir qu'il ne ſera pas impoſſible de trouver une hypotheſe de denſité, conforme aux loix de la nature, & ſuffiſante pour repréſenter les mouvemens d'apſide obſervés.

§. LXVI.

Nous établirons pour le rapport des axes de Jupiter, celui de 13 à 14. Si la denſité étoit uniforme, on trouveroit que

le mouvement de l'apside du troisieme seroit d'environ 3° 55′, & celui du quatrieme de 32′. Ces quantités, ajoutées à celles qui seront déterminées dans la troisieme Partie, & qui sont dues à l'action des Satellites, prouvent évidemment que la densité de Jupiter n'est pas uniforme : ce qui étoit déja prouvé dans la Théorie de la figure de la Terre de M. Clairaut, où il fait voir que dans cette supposition le rapport des axes seroit celui de 9 à 10.

PROBLÊME VI.

Trouver le mouvement horaire vrai d'un Satellite dont la longitude vraie est $x + a \sin nx$.

§. LXVII.

Si l'argument nx varie de la quantité m dans l'espace d'une heure, on aura alors $x' + a \sin(nx \pm m)$. La différence de ces deux longitudes vraies donnera le mouvement horaire vrai, qui sera $x' - x - a \sin nx + a \sin(nx \pm m)$. Mais $\sin(nx \pm m) = \cos m \sin nx \pm \sin m \cos nx$. Nommant k le mouvement horaire moyen, ou $x' - x$, on aura $k - a \sin nx + a \cos m \sin nx \pm a \sin m \cos nx$ pour l'expression du mouvement horaire, dans laquelle on pourra se contenter du dernier terme seul. Ainsi l'on aura $k \pm a \sin m \cos nx$; $+$ étant pour le cas où l'argument nx augmente, & $-$ pour le cas où il diminue.

PROBLÊME VII.

Déterminer le tems de la demi-durée de l'éclipse d'un Satellite de Jupiter dans l'orbite troublée, étant donnés l'in-

clinaiſon de l'orbite & la diſtance du Satellite à ſon nœud.

§. LXVIII.

Soit B [*fig.* 6.] l'angle de l'inclinaiſon ; CB la diſtance du centre de Jupiter, ou du Satellite au nœud ; DE le diametre de l'ombre dans les moyennes diſtances, connu par l'obſervation. Soit abaiſſée de C une perpendiculaire AC, qui partage la corde que le Satellite parcourt en deux parties égales. On aura $\sin AC = \sin AB \sin B$, & $\frac{\cos FC}{\cos AC} = \frac{\cos CD}{\cos AC} = \cos AF$. L'arc AF eſt donc l'arc qui meſure la moitié du chemin que fait dans l'ombre de Jupiter un Satellite qui eſt, dans ſes diſtances moyennes, éloigné de ſes nœuds de l'arc BC, l'inclinaiſon étant B.

§. LXIX.

Soit maintenant AB le demi-diametre de Jupiter,
ABC la moitié du cône d'ombre,
[*fig.* 7.] AD la diſtance moyenne du Satellite,
Dd la diff. de ſa diſt. vraie à ſa diſt. moy.
DE l'arc que nous venons de trouver, & qu'il auroit parcouru, s'il avoit été dans ſa diſtance moyenne ;
de l'arc qu'il parcourt réellement.

AD étant ſuppoſée l'unité, on trouvera facilement, par le rapport des diametres du Soleil & de Jupiter, que l'axe du cône d'ombre AC eſt 124, 6. Nous aurons donc

$$123,6 : DE :: 123,6 - Dd : de,$$

en confondant les arcs DE, de avec leurs ſinus. On aura

donc $de = \frac{DE(123,6 - Dd)}{123,6}$, ou $de = DE - \frac{DE.Dd}{123,6}$. Mais comme Dd ne ſurpaſſera jamais 0,03, il s'enſuit que l'arc de ne pourra différer de l'arc DE que de $\frac{1}{1708}$: ce qui ne peut aller par conſéquent, dans les cas les plus défavorables, qu'à ſix ſecondes: quantité très négligeable, & qui permet de ſuppoſer que $de = DE$.

Les arcs de & DE étant égaux, les angles ſont en raiſon inverſe des rayons Ad, AD : ainſi l'angle que le Satellite doit décrire dans la moitié de l'ombre ſera $\frac{DE}{Ad}$, ou, en prenant l'arc trouvé par la fig. 6, $\frac{AF}{Ad}$.

§. LXX.

Maintenant, ſoit l'angle du mouvement horaire a; on aura $a : 3600'' :: \frac{AF}{Ad} : \frac{3600'' AF}{a.Ad}$. Ce qui fait voir que, pour avoir la demi-durée dans l'orbite troublée, il faut multiplier par 3600″ l'arc trouvé par la trigonométrie, ſuivant la méthode du Paragraphe LXVIII, & le diviſer par l'angle du mouvement horaire vrai, multiplié par le rayon recteur de l'orbite troublée.

§. LXXI.

Il y a, dans les déterminations précédentes, une ſource d'erreur que pluſieurs Aſtronomes ont déja remarquée, & qu'il eſt eſſentiel d'apprécier.

Quand nous avons abaiſſé, du centre de Jupiter C, une perpendiculaire ſur la trace du Satellite dans l'ombre, nous avons partagé la durée de l'éclipſe en deux parties égales ; mais cet inſtant n'eſt pas l'inſtant vrai de la conjonction du Satellite avec Jupiter. Pour le déterminer, il faut au con-

traire élever du point C une perpendiculaire ſur DE; & le point où elle rencontrera l'orbite du Satellite, ſera le lieu de la conjonction.

Le petit arc Aa eſt donc la différence de ces deux inſtans, & ce qui doit être ajouté ou retranché de la demi-demeure dans l'ombre.

On aura . . $\sin B\dot{C} \tan B = \tan aC$,

& . . $\cos B\dot{C} \sin B = \cos a$,

$\tan aC \cos a = \tan Aa$.

Donc $\tan Aa = \sin BC \cos BC \sin B \tan B$; ou, parceque les ſinus & les tangentes d'angles qui ne ſurpaſſent pas 3° 40′, ne different pas ſenſiblement, $\tan Aa = \sin BC \cos BC \sin^2 B$.

Cette correction ſera la plus grande, lorſque BC ſera de 45°; & nulle, lorſque BC ſera de 90°, ou de 0°.

Quant à ce qu'elle doive être ajoutée, ou retranchée, cela eſt déterminé par le coſinus de BC. Tant qu'il ſera poſitif, & que par conſéquent la diſtance au nœud, ſoit aſcendant, ou deſcendant, ſera de moins de 90°, la correction ſera additive à la demi-durée, & négative, lorſque BC ſurpaſſera 90°.

Ceci doit être entendu à l'égard des immerſions: ce ſeroit le contraire pour les émerſions. Mais ſi l'on a, par le moyen des deux phaſes d'une éclipſe obſervée, déterminé l'inſtant de la conjonction, & que l'on ait calculé le lieu du Satellite dans ſon orbite pour cet inſtant, la regle ſera générale; & la correction ſera additive, lorſque la diſtance au nœud prochain ſera de moins de 90°; & négative, lorſqu'elle ſera de plus de 90°.

§. LXXII.

Nous allons apprécier quel peut être l'arc Aa dans la

théorie des Satellites de Jupiter, à 45° degrés des nœuds; en supposant les inclinaisons suivantes,

1er.	. . . 3° 4',	l'arc *Aa* sera	4' 55",
2e.	. . . 3° 40',	. . . . .	7' 2",
3e.	. . . 3° 12',	. . . . .	5' 21",
4e.	. . . 2° 24',	. . . . .	3' 1".

Ce qui peut produire une erreur sur les demi-durées, de 35" pour le premier, 1' 40" pour le second, 2' 33" pour le troisieme, & enfin 3' 21" pour le quatrieme.

§. LXXIII.

M. de la Lande nous a fait connoître une autre circonstance de la théorie des Satellites [a], qui méritoit d'être remarquée; c'est l'ellipticité de l'ombre de Jupiter. Elle influe particuliérement sur la détermination de l'inclinaison. Voici sa formule.

Nommant d la plus grande demi-durée en tems,
a la demi-durée observée,
sin I le sinus de l'inclinaison,
sin D le sinus de la distance au nœud,
t un nombre trouvé, trouvé en faisant comme 360° : 57° 17' 44,8 :: le tems de la révolution périodique du Satellite : t;

$$a = \frac{14}{13}\sqrt{\left(\frac{13}{14}d + \sin I \sin D . t\right)\left(\frac{13}{14}d - \sin I \sin D . t\right)}.$$

t est toujours donné : mais étant données trois des quatre autres choses, on en déduira toujours la quatrieme.

Si l'on veut, par exemple, calculer l'inclinaison, au moyen de la formule précédente & d'une demi-durée a, observée

[a] Voyez la Connoissance des Tems 1765. Astronomie, pag. 1116.

dans les circonſtances favorables, on aura ſin $I = \frac{\frac{13}{14}\sqrt{dd - aa}}{t \sin D}$. Mais, dans l'hypotheſe de l'ombre circulaire, on auroit ſin $I = \frac{\sqrt{dd - aa}}{t \sin D}$. Il s'enſuit que les inclinaiſons déduites des deux hypotheſes, ſont entre elles comme $\frac{13}{14}$ à 1.

§. LXXIV.

Si maintenant, avec l'inclinaiſon deduite de l'hypotheſe circulaire, on vouloit calculer les demi-durées dans le cercle & dans l'ellipſe, on trouveroit les dernieres plus courtes, à 90° des nœuds, des quantités ſuivantes:

pour le 1er.	. .	1′ 33″, [a]
pour le 2e.	. .	2′ 14″,
pour le 3e.	. .	1′ 13″.

Pour le quatrieme, la différence ſeroit très conſidérable. Mais quand on veut trouver la demi-durée dans l'hypotheſe elliptique, il faut ſe ſervir de l'inclinaiſon déduite de la même hypotheſe: alors on peut démontrer que les demi-durées calculées dans les deux hypotheſes, ſont rigoureuſement égales.

On aura, dans l'hypotheſe circulaire,

$$a = \sqrt{dd - \sin^2 I \sin^2 D . t^2};$$

dans l'hypotheſe elliptique,

$$a = \frac{14}{13}\sqrt{\frac{13 . 13}{14 . 14} dd - \sin^2 I \sin^2 D . t^2}.$$

Nous venons de voir dans le Paragraphe précédent, que les deux inclinaiſons étoient dans le rapport de 1 à $\frac{13}{14}$: il faut donc multiplier par $\frac{13}{14}$ le ſinus de l'inclinaiſon déterminée dans l'hypotheſe circulaire, pour avoir le ſinus de l'inclinaiſon dans l'hypotheſe elliptique. Subſtituant cette valeur

[a] Connoiſſance des Tems 1765, pag. 178.

de ſinus I dans la ſeconde formule, on aura

$$a = \frac{14}{13}\sqrt{\frac{13 \cdot 13}{14 \cdot 14} dd - \frac{13 \cdot 13}{14 \cdot 14} \sin^2 I \sin^2 D. t^2},$$

ou . . $a = \sqrt{dd - \sin^2 I \sin^2 D. t^2}$.

Ceci fait voir que, ſi l'on veut connoître l'inclinaiſon d'un Satellite, il faut la déduire de l'hypotheſe de l'ombre elliptique. Mais lorſque l'on veut calculer les demi-durées, il n'y a pas d'inconvénient de ſe ſervir de la méthode ordinaire, c'eſt-à-dire, de calculer dans l'hypotheſe circulaire, pourvu qu'on ſe ſerve de l'inclinaiſon déduite de la même hypotheſe. La méthode eſt plus facile & plus expéditive.



TROISIEME

TROISIEME PARTIE.

PREMIERE SECTION.

§. I.

Nous allons passer aux quantités numériques, en employant les élémens établis §. XXI de la seconde Partie.

Nous laisserons à part les équations qui naissent de l'excentricité, inconnue jusqu'ici dans la théorie des trois premiers Satellites, & nous ne prendrons du Problême I, que celles qui ont lieu en faisant l'excentricité égale à zero.

§. II.

Nous nommerons Q la masse du premier Satellite,
R celle du second,
N celle du troisieme,
M celle du quatrieme;
supposant toujours la masse de Jupiter égale à 1.

Comme il s'est trouvé, dans l'expression de Ξ, des termes dont les coefficiens étoient fort au-dessus de l'unité, & que les puissances de ces termes n'auroient pas été négligeables; j'ai considéré que ces termes devoient être multipliés par une très petite masse, & étoient réellement fractionnaires. J'ai divisé tous les coefficiens par mille: par conséquent les masses que je déduirai du calcul seront mille fois trop grandes; & il ne s'agira, pour avoir les véritables, que de les diviser par mille.

K

§. III.

Perturbations du second Satellite sur le premier.

$$r = 1 + R\,(0{,}00082 \cos nx - 0{,}20492 \cos 2nx - 0{,}00072 \cos 3nx),$$
$$v = x - R\,(0{,}00297 \sin nx - 0{,}40666 \sin 2nx - 0{,}00112 \sin 3nx).$$

§. IV.

Perturbations du troisieme.

$$r = 1 + N(0{,}00015 \cos nx - 0{,}00019 \cos 2nx - 0{,}00012 \cos 3nx),$$
$$v = x - N(0{,}00039 \sin nx - 0{,}00030 \sin 2nx).$$

§. V.

Perturbations du quatrieme.

$$r = 1 + M(0{,}00002 \cos nx - 0{,}00002 \cos 2nx),$$
$$v = x - M(0{,}00005 \sin nx - 0{,}00003 \sin 2nx).$$

§. VI.

Perturbations du premier sur le second.

$$r = 1 + Q(0{,}05981 \cos nx + 0{,}00067 \cos 2nx + 0{,}00016 \cos 3nx),$$
$$x = x - Q(0{,}11678 \sin nx + 0{,}00085 \sin 2nx + 0{,}00018 \sin 3nx).$$

§. VII.

Perturbations du troisieme.

$$r = 1 + N(0{,}00083 \cos nx - 0{,}10146 \cos 2nx - 0{,}00071 \cos 3nx),$$
$$v = x - N\left\{ \begin{array}{l} 0{,}002957 \sin nx - 0{,}20082 \sin 2nx - 0{,}00111 \sin 3nx \\ \text{[a]} + 0{,}00766 \sin 4nx \end{array} \right\}.$$

[a] Il faut bien faire attention que ce terme doit être multiplié par le quarré de la masse. Voyez la seconde Partie, §. XXXVII.

§. VIII.

Perturbations du quatrieme.

$$r = 1 + M\,(0,00009 \cos nx - 0,00011 \cos 2nx),$$
$$v = x - M\,(0,00023 \sin nx - 0,00017 \sin 2nx).$$

§. IX.

Perturbations du premier ſur le troiſieme.

$$r = 1 + Q\,(0,00042 \cos nx + 0,00001 \cos 2nx),$$
$$v = x + Q\,(0,00037 \sin nx + 0,00001 \sin 2nx).$$

§. X.

Perturbations du ſecond.

$$r = 1 + R\,(0,02985 \cos nx + 0,00067 \cos 2nx);$$
$$v = x - R\,(0,057137 \sin nx - 0,00166 \sin 2nx).$$

§. XI.

Perturbations du quatrieme.

$$r = 1 + M\,(0,00052 \cos nx - 0,00310 \cos 2nx - 0,00027 \cos 3nx);$$
$$v = x - M\,(0,00166 \sin nx - 0,00568 \sin 2nx).$$

§. XII.

A l'égard de la théorie du quatrieme, les équations que peuvent produire le premier & le ſecond ſont abſolument inſenſibles. Nous ne nous arrêterons ici qu'à celles du troiſieme.

Perturbations du troisieme sur le quatrieme.

$r = 1 + N(0,00123 \cos nx + 0,00023 \cos 2nx)$,
$v = x - N(0,00044 \sin nx + 0,00026 \sin 2nx)$.

SECONDE SECTION.

Détermination des masses des Satellites de Jupiter.

§. XIII.

Les équations empyriques que M. Wargentin a introduites dans ses Tables, paroissent devoir fournir les moyens de déterminer les masses.

En comparant ces équations aux coefficiens que nous venons d'établir, nous trouverons que l'équation du premier Satellite, de 3′ 30″ en tems, ou de 29′ 30″ de l'orbite de ce Satellite, est la même que celle du §. III, dont le coefficient est $0,40666 \sin 2nx$, & qui est due à l'action du second : car le rapport du mouvement du second à celui du premier est comme 0,4981812 à 1. La fraction 0,5018188 exprimera donc la valeur de l'angle nx qui mesure leur distance. Ainsi, en deux révolutions du premier Satellite, cet angle augmentera de 0,0036376, & par conséquent l'angle $2nx$ de 0,0072752. Mais, en deux révolutions du premier Satellite, Jupiter décrit un angle dont la valeur est 0,0008163 : ainsi l'angle $2nx$ augmentera, à l'égard de Jupiter, de 0,0080914; & la période qui ramenera les conjonctions des deux Satellites au même aspect, relativement à Jupiter, sera de 437 jours & quelques heures.

L'équation du §. III est donc la même que celle des Tables de M. Wargentin.

Nous nous permettrons de négliger dans le calcul toutes les autres équations; nous supposerons que l'équation qui dépend du sinus de $2nx$, soit la seule qui puisse être apperçue par les observations ; & nous en déduirons la valeur de la masse du second, $R = 0,0000211$.

§. XIV.

Nous passerons ensuite à l'examen de l'équation de $16' \ 30''$ des Tables du second Satellite. Cette équation vaut en degrés $1° \ 9' \ 42''$.

Sa période est de 437 jours ; & cela nous indique qu'elle ne peut être produite que par l'action du premier & du troisieme, puisque cet intervalle de tems est celui qui ramene les trois premiers Satellites au même aspect à l'égard de Jupiter : le quatrieme ne doit pas y être compris.

Les équations des §. V & VI, $- 0,11678 \ Q \sin nx$ & $+ 0,20082 \ N \sin 2n'x$, sont donc celles dont la combinaison semble devoir produire l'équation de $1° \ 9' \ 42''$, déterminée par les observations. Dans cette supposition, il n'est pas douteux qu'on doit avoir la valeur des masses, en prenant, pour deux instans quelconques, la quantité relative de l'équation empyrique, & en réduisant les coefficiens aux valeurs qu'ils doivent avoir relativement aux sinus nx & $2n'x'$, qui ont lieu pour ces deux instans.

C'est ainsi que j'ai eu les deux équations suivantes pour les observations du 9 Mars & du 28 Avril 1733 :

$$0,1133 \ Q + 0,1948 \ N = 0,01978,$$

$$0,0686 \ Q + 0,1181 \ N = 0,01186.$$

Mais ces équations, & toutes les autres qu'on pourroit former

ainſi, donnent une des maſſes négatives. Il y a donc ici quelque point où la théorie n'eſt pas d'accord avec la nature. Je remarquerai d'abord, que l'on ne peut pas penſer que le défaut vienne de l'équation empyrique. Sa marche eſt aſſez connue pour repréſenter très bien les obſervations ; elle l'eſt donc ſuffiſamment pour en tirer la concluſion que nous cherchons: & en ſuppoſant qu'il y eût quelque légere erreur dans les quantités relatives aux inſtans donnés, comme cela peut être, cela ne pourroit jamais produire que quelques différences dans les valeurs des maſſes qu'on en déduiroit; mais on n'en doit jamais tirer des maſſes négatives.

§. XV.

Ces deux équations du premier & du troiſieme Satellites peuvent ſe réduire à celle-ci $(-0,11678\,Q - 0,20082\,N)$ ſin nx ; car le mouvement du ſecond Satellite étant 1, celui du premier ſera 2,0072947,
celui du troiſieme 0,4963525.

L'angle nx croîtra, à chaque révolution du ſecond, de de 0,0072947, & l'angle $2n'x$ de 0,0072950. Ces deux angles croîtront donc égalément [a], & conſerveront toujours la même différence. Les obſervations nous apprennent que cette différence eſt de ſix ſignes. Il en réſulte que les ſinus de nx & de $2n'x$ auront des ſignes contraires, & que l'on aura par conſéquent $(-0,11678\,Q - 0,20082\,N)$ ſin nx.

§. XVI.

En faiſant ſin nx égal à 1, & prenant la valeur de 1° 9',

[a] Je dis qu'ils croiſſent également, malgré la légere différence de 0,0000003, parce-qu'elle vient de la difficulté de déterminer le rapport des mouvemens par les révolutions périodiques : mais on s'aſſurera de cette vérité en calculant les poſitions reſpectives des trois Satellites pour deux inſtans éloignés de cent ans : on verra que la différence des angles nx & $2n'x$ eſt toujours la même.

42″ en parties du rayon, on aura l'équation ſuivante,

$$-0,11678\,Q\;0,20082\,N = -0,02027,$$

dans laquelle, faiſant chacune des maſſes ſucceſſivement égale à zero, on trouvera que Q ne pourra jamais être plus grande que 0,0001736, & N, 0,0001009. Mais ſi on les ſuppoſe égales, on aura pour N & Q, cette valeur 0,0000638.

Or, comme il eſt impoſſible que l'une des maſſes ſoit zero, on voit que leur valeur doit être plus près de cette derniere valeur, que des premieres. Mais, quelqu'hypotheſe de maſſes que l'on prenne entre ces deux cas extrêmes, il n'y en aura pas une qui puiſſe ſatisfaire aux mouvemens des nœuds.

§. XVII.

Cependant la période de l'équation compoſée des actions réunies du premier & du troiſieme Satellites, dont l'argument eſt ſin nx, ſera de 437 jours; car l'angle nx croiſſant, à chaque révolution du ſecond, de 0,0072947, & le mouvement de Jupiter étant dans le même tems 0,0008202, la période du retour de Jupiter au même aſpect des deux Satellites ſera de 437 jours & quelques heures.

Notre équation a donc la même période que celle de M. Wargentin. L'hypotheſe de maſſes qu'on en déduiroit, les donneroit trop petites; & ſi on les ſuppoſoit plus grandes, & telles qu'elles devroient être dans d'autres cas, l'équation alors excéderoit de beaucoup celle de M. Wargentin, qui eſt de 1° 9′ 42″.

§. XVIII.

Mais je remarque qu'il peut y avoir quelque équation dépendante de l'excentricité, qui ſoit toujours en ſigne contraire à celle-ci, & qui en diminuant la quantité, la réduiſe à la valeur de celle de M. Wargentin.

L'excentricité étant e, & l'anomalie vraie y, on tirera du Problême I les équations suivantes,

$-42,627\, Qe \sin(nx - y) - 30,927\, Ne \sin(2n'x - y)$.

Or il est facile de voir dans ces équations, qu'elles auront le même argument que celles du §. XVI, lorsque y sera égale à zero ou à 180 degrés; & que pour leur donner un signe contraire, c'est à cette derniere supposition qu'il faut s'en tenir. On aura alors

$(-0,11678\, Q + 42,627\, Qe - 0,20082\, N - 30,927\, Ne) \sin nx = -1° 9' 42''$.

Et pour que cette équation ait lieu, il suffira d'établir pour condition, que Jupiter soit toujours dans le même point du ciel que le *perijove* du Satellite; c'est-à-dire que le mouvement de l'apside soit égal au moyen mouvement de Jupiter. Et quand les masses N & Q auront été fixées, on déterminera la valeur de e en conséquence.

§. XIX.

Maintenant, pour découvrir la valeur des masses, nous aurons recours au mouvement des nœuds. On verra dans la quatrieme Partie, que la variation de l'inclinaison du second Satellite suppose que la révolution du mouvement des nœuds s'acheve en trente ans.

Ce mouvement uniforme sera donc de 12° par an: & comme il dépend de l'action du premier jointe à celle du troisieme, il nous fournira l'équation suivante,

$$-0,04925\, N - 0,07949\, Q = -0,03333.$$

Le mouvement direct des nœuds du quatrieme sur l'écliptique de Jupiter a été observé de 5' 33'' par M. de Maraldi.

Nous avons trouvé dans la premiere Partie, §. XII, que le mouvement rétrograde des nœuds du quatrieme, dû à l'action

l'action du Soleil, étoit de $5' 14'', 6$: il en réſulte que celui qui eſt dû à l'action réunie des trois Satellites perturbateurs, & qui eſt direct, doit être de $10' 47'', 6$.

§. XX.

Soit [*fig.* 9.] ***BC*** l'orbite du Satellite perturbateur, ***AB*** celle du Satellite troublé, ***AC*** celle de Jupiter; les formules différentielles donneront $d. AC = \frac{d. BC. \sin B \cos AB}{\sin A}$.

Mais 1°. les nœuds des Satellites étant très près les uns des autres, l'arc ***AB*** ſera toujours aſſez petit pour qu'on puiſſe mettre l'unité pour ſon coſinus : 2°. l'angle ***B*** ſera variable à l'égard du ſecond & du troiſieme. Et comme il ne s'agit ici que de connoître le moyen mouvement, nous prendrons la valeur moyenne de cet angle.

Mais l'inclinaiſon moyenne du ſecond & du troiſieme eſt égale [a] à l'inclinaiſon du premier, $3° 4'$: nous pourrons donc prendre cette inclinaiſon pour l'inclinaiſon moyenne des trois Satellites perturbateurs. Ainſi, nommant ω le mouvement du nœud, ce mouvement, réduit à l'écliptique de Jupiter, ſera égal à $\frac{\omega \sin 40}{\sin 2° 24''}$.

Avec cette expreſſion, & la quantité ω du mouvement déterminé dans la quatrieme Partie, nous aurons

$$0,0001381 N + 0,000340 R + 0,0000115 Q = 0,0000229.$$

Par la valeur de ***R*** du §. XIII, nous réduirons cette équation à deux indéterminées

$$0,0001381 N + 0,0000115 Q = 0,0000222 :$$

& cette équation, combinée avec celle du §. précédent, nous donnera la valeur des maſſes,

$$N \cdots 0,0001327,$$
$$Q \cdots 0,0003370.$$

[a] Voyez la quatrieme Partie.

L

§. XXI.

A l'égard de la masse du quatrieme, nous n'avons pas vu d'autre moyen de la déterminer, que celui de se servir des observations du troisieme Satellite. Après les avoir corrigées de l'effet des perturbations du premier & du second, le reste de l'erreur doit appartenir aux perturbations du quatrieme.

C'est donc par le plus grand accord des observations, que nous avons fixé la valeur de cette masse à 0,00005.

Je ne crois pas qu'elle puisse être plus grande ; mais on parviendra peut-être à confirmer ou à rectifier cette determination par les moyens qui seront proposés dans la quatrieme Section de la quatrieme Partie.

§. XXII.

A l'égard des masses du premier & du troisieme, elles supposent, comme on l'a vu, que le mouvement direct du nœud du quatrieme soit de 5′ 33″ par an, & que la période des variations de l'inclinaison du second soit exactement de trente ans. Si les observations indiquoient quelque changement à faire dans ces élémens, il en résulteroit d'autres masses ; mais ces masses ne différeroient sans doute que très peu de celles-ci, parceque les corrections que ces élémens peuvent souffrir, ne doivent pas être considérables.

Il est aisé d'apprécier l'effet des corrections qu'on pourroit faire sur les élémens.

Soient les deux équations $aN + bQ = c + \alpha$,

$$dN + hQ = f + \lambda,$$

en supposant que les changemens que l'on pourroit faire dans les mouvemens du nœud du second & du nœud du quatrieme

fussent α & λ. Alors les masses seront exprimées par les équations suivantes, $N = \frac{ch - bf}{ah - bd} + \frac{\alpha h - b\lambda}{ah - bd}$,

$$Q = \frac{cd - af}{bd - ah} + \frac{\alpha d - a\lambda}{bd - ah}.$$

Et en mettant pour les coefficiens a, b, d, h, les valeurs données par la théorie, on trouvera les masses

$$N = 0,0001327 - 0,0011\,\alpha + 7,63\,\lambda\,;$$
$$Q = 0,0003370 + 0,0133\,\alpha - 4,73\,\lambda.$$

§. XXIII.

Maintenant si l'on veut examiner le cas extrême, qui seroit celui où la période de la variation de l'inclinaison seroit de trente-deux ans, & où le mouvement du quatrieme ne seroit que de 3′ 10″, à-peu-près tel que M. Wargentin le suppose dans ses Tables; alors $\alpha = -0,002080$, $\lambda = -0,000005$, & l'on auroit $N = 0,0000968$,

$$Q = 0,0003330.$$

Ces nouvelles valeurs des masses nous font connoître que celle du premier ne souffrira qu'un léger changement, & que conséquemment on peut la regarder comme très bien déterminée. A l'égard de celle du troisiéme, elle est ici diminuée de plus d'un quart de la valeur que nous lui avons assignée: mais nous pouvons être surs que la véritable masse est entre ces limites; & pour la fixer, il ne s'agit que de déterminer, par les observations les plus favorables, & la durée de la période de la variation de l'inclinaison du second, & le mouvement annuel du nœud du quatrieme. En attendant que j'aie achevé ce travail, je m'en tiendrai à la durée de la période établie de trente ans par M. Maraldi, & au mouvement du nœud du quatrieme qu'il a déduit des observations. Conséquemment à ces élémens, nous regarderons les masses du §. XX comme suffisamment exactes.

TROISIEME SECTION.

Théorie du premier Satellite.

§. XXIV.

L'ORBITE du premier Satellite eſt ſenſiblement circulaire : aucun Aſtronome n'a juſqu'ici apperçu ſon excentricité, qui doit être fort petite. Les Tables de M. Wargentin [a], qui repréſentent ſi bien les obſervations, ne renferment qu'une ſeule équation qui eſt produite par l'action du ſecond. Il eſt vrai que M. Caſſini preſcrivoit d'augmenter d'un trentieme l'équation du centre de Jupiter; mais il me paroît démontré aujourd'hui que cette correction n'étoit néceſſaire que parce-qu'on faiſoit alors l'équation du centre de Jupiter trop petite. C'eſt un point que l'on peut examiner par la ſuite, mais qui n'eſt pas aſſez bien éclairci, ni aſſez important pour nous arrêter ici.

§. XXV.

Au moyen des maſſes N & R, établies dans les §. XX & XIII, nous aurons, pour le rayon vecteur r, & pour la longitude vraie v, les valeurs ſuivantes, en nommant

t la longitude moyenne du premier moins celle du ſecond,
t' la longitude moyenne du premier moins celle du troiſieme,
x la longitude moyenne du premier,

$r = 1 - 0,00432 \cos t$,

$v = x - 13'' \sin t + 29'30'' \sin 2t + 5'' \sin 3t - 10'' \sin t' + 8 \sin 2t'$.

Il eſt évident qu'il n'y aura que l'équation qui dépend du ſinus $2t$, qui mérite d'être employée.

[a] *Acta Societ. Reg. Upſalienſis*, ann. 1742.

Nous négligeons abſolument les perturbations du quatrieme, comme devant être inſenſibles.

§. XXVI.

L'équation 4′ 55″, qui a été déterminée au §. LXXII, pour corriger la conjonction trouvée par les demi-durées, eſt ici plus néceſſaire qu'on ne ſe l'étoit figuré juſqu'à préſent. Je l'ai calculée en ſuppoſant l'inclinaiſon 3° 4′. C'eſt ſur cette ſuppoſition que j'ai auſſi établi la plus grande réduction à l'écliptique de Jupiter 2′ 27″. Comme ces deux équations ont le même argument, qui eſt la diſtance au nœud, je n'en ai fait qu'une ſeule Table.

Quant à la correction des demi-durées, produites par la variation du mouvement horaire & par celle du rayon vecteur, le calcul en ſeroit trop long en ſuivant ce qui a été indiqué plus haut, §. LXX de la ſeconde Partie : nous allons l'abréger en faveur de ceux qui ont beaucoup d'obſervations à calculer.

Nous avions $\frac{3600'' AF}{a . Ad}$ pour l'expreſſion de la demi-durée, AF repréſentant l'arc de la demi-demeure dans l'ombre, calculé par la trigonométrie pour la diſtance moyenne du Satellite ; a le mouvement horaire ; Ad le rayon vecteur.

Nous aurons maintenant $Ad = 1 - 0{,}00432 \cos 2t$, $a = 8° 28' 43'' - 2' 11'' \cos 2t = 8° 28' 43'' (1 - 0{,}00430 \cos 2t)$. Donc $\frac{3600'' AF}{a . Ad} = \frac{3600'' AF}{8° 28' 43''} (1 + 0{,}00002 \cos 2t)$.

Ainſi la demi-durée moyenne $\frac{3600'' AF}{8° 28' 43''}$, c'eſt-à-dire, la demi-durée des Tables, ne ſera aſſujettie à aucune correction.

§. XXVII.

Les Tables du premier Satellite de M. Wargentin ſont très

exactes; cependant, comme j'ai fait entrer dans le calcul ces deux nouvelles équations, & que d'ailleurs je donnois une forme différente à mes Tables, j'ai essayé de déterminer le moyen mouvement & ses époques. J'ai calculé quarante-huit observations comprises entre le 5 Décembre 1719 & le 22 Avril 1722, & j'ai vu qu'il falloit ajouter aux époques [a] de M. Bradley, 11′ pour le premier Janvier 1720.

J'ai calculé trente-une observations comprises entre le 26 Février 1742 & le 10 Janvier 1744: ces observations m'ont fait connoître qu'il falloit ajouter 16′. 30″ à l'époque de 1743. Il résulte de ces corrections, qu'il faut augmenter de 11″ le mouvement annuel du premier Satellite. Cependant, en calculant quelques observations du dernier siecle, vers 1672, 1677, 1689, j'ai trouvé que les époques de ces années, établies en supposant le mouvement annuel augmenté de 11″, n'étoient pas assez avancées; & cela semble indiquer une accélération dans le mouvement de ce Satellite. J'ai adopté cette accélération dans mes Tables, en attendant qu'elle soit justifiée par la théorie; & je ne la donne pas comme démontrée, mais comme une supposition que les observations semblent indiquer. En reprenant le calcul des perturbations du second Satellite sur le premier, & en employant pour la longitude vraie, l'équation que donne le §. XXV, on sera en état de décider la question.

L'époque de 1720, nouveau style, pour le méridien de Paris, sera donc dans $9^s\ 6^\circ\ 16'\ 42''$, en établissant le moyen mouvement pour les années communes $3^s\ 23^\circ\ 28'\ 51''$, & pour les années bissextiles $10^s\ 22^\circ\ 58'\ 11''$.

A l'égard de l'accélération, on ajoutera aux époques, soit

[a] Voyez les Tables imprimées dans l'édition latine des Tables de Halley.

en deçà, ſoit au-delà de 1720, des quantités proportionnelles au quarré des tems écoulés, ſuivant la méthode de Halley, en ſuppoſant que l'accélération de la premiere année ſoit de 0″, 08.

On aura, en conſéquence, 3′ 20″ à ajouter à l'époque de 1670, & 43″ à l'époque de 1743. Nous avons ajouté 11′ à l'époque de 1720; mais l'augmentation de 11″ que nous avons faite au mouvement annuel, fait qu'il n'y aura que 1′ 50″ à ajouter à l'époque de 1670, & qu'il y aura 15′ 11″ à ajouter à celle de 1743. On aura donc les quantités ſuivantes pour les corrections additives de ces trois époques : 1670, + 5′ 10″; 1720, + 11′; 1743, + 15′ 54″.

Je crois avoir ſatisfait à ce que demandent les obſervations; ſavoir, que l'époque de 1720 ſoit avancée de 11′, que celle de 1743 le ſoit d'environ 16′, & que cependant celle de 1672 & des années voiſines ſoient auſſi avancées de pluſieurs minutes.

§. XXVIII.

Maintenant, pour s'aſſurer de l'exactitude des élémens ſur leſquels mes Tables ſont établies, il auroit fallu calculer toutes les obſervations faites juſqu'ici, & examiner ſi elles ſont toutes également bien repréſentées : mais le tems qui me reſte ne me permet pas de le faire. Je préſente cet eſſai aux Savans, & je les ſupplie de m'éclairer, & de corriger mon travail, s'ils croient qu'il en vaille la peine.

§. XXIX.

Le lieu de Jupiter, dont je me ſuis ſervi pour déterminer l'inſtant des conjonctions, a été calculé ſur les Tables de M. Caſſini : mais l'erreur de ces Tables va quelquefois au-delà

de 7′, & j'avois lieu de craindre que les élémens de la théorie que je voulois établir n'en fuſſent affectés. Voici le moyen dont j'ai fait uſage pour corriger le lieu de Jupiter de l'erreur des Tables.

J'ai remarqué, en jettant les yeux ſur la Table des erreurs de la longitude de Jupiter en oppoſition, que ces erreurs, quelque loi qu'elles ſuivent, marchent aſſez réguliérement; c'eſt-à-dire que ſi elles ſont poſitives, elles augmentent pendant quelques années, décroiſſent enſuite pendant quelques autres, & paſſent du poſitif au négatif, pour croître & décroître enſuite de la même maniere. Soient pour exemple les erreurs ſuivantes:

1685,	6 Avril	. .	+ 1′ 0″,
1686,	7 Mai	. .	+ 2 22,
1687,	9 Juin	. .	+ 4 24,
1688,	13 Juillet	. .	+ 6 6,
1689,	19 Août	. .	+ 7 18,
1690,	26 Sept.	. .	+ 5 9,
1691,	2 Nov.	. .	+ 3 35.

J'ai ſuppoſé que l'erreur des Tables de Jupiter, entre les inſtans de deux oppoſitions conſécutives, étoit renfermée dans les limites des erreurs de ces deux oppoſitions; qu'ainſi, entre le 9 Juin 1687 & le 13 Juillet 1688, l'erreur avoit toujours été entre 4′ 24″ & 6′ 6″. De maniere que, pour corriger la longitude de Jupiter du 9 Octobre 1687, je dirois: L'erreur croît d'environ 8″ par mois; il s'eſt écoulé quatre mois depuis l'oppoſition; l'erreur ſera donc + 4′ 56″ pour le 9 Octobre 1687. Je ſens que ceci n'eſt pas rigoureuſement exact, & que je puis très bien me tromper de 30″, ou même d'une minute, ſur l'erreur ainſi évaluée; mais la théorie des Satellites ſera peut-être toujours trop imparfaite, pour qu'une erreur d'une minute

minute sur le lieu de Jupiter puisse mériter quelque considération. De plus, je n'ai point connu de meilleur moyen : c'est une forte raison ; & j'ai préféré de corriger la longitude de Jupiter d'une erreur de plusieurs minutes, en risquant de me tromper d'une petite partie de cette erreur, soit en plus, soit en moins, que de la laisser subsister toute entiere.

A l'égard de la prédiction des éclipses futures, cette méthode n'est plus d'aucune utilité ; mais en se servant des Tables de M. Jeaurat, Tables dont il a discuté tous les élémens avec beaucoup de soin & de sagacité, on sera sûr que cette erreur n'excédera que très rarement 3'.

M. Jeaurat a bien voulu me les donner pour les faire imprimer à la suite de cet Ouvrage : il compte qu'elles seront plus exactes que celles qu'on a eues jusqu'aujourd'hui ; & voici ce qu'il m'en a dit lui-même.

En 1764, il a dépouillé toutes les observations de l'effet produit par l'action de Saturne, tel que l'a donné M. Mayer dans ses petites équations. Il a ensuite déduit, des observations ainsi corrigées, les changemens qu'il convenoit de faire aux principaux élémens de la théorie de Jupiter. Il résulte de ce travail, que l'erreur des Tables se trouve de 8' à 9' pour les observations faites en 1709, 1721 & 1722.

En 1765, M. Jeaurat s'est déterminé à ne point tenir compte des petites équations de M. Mayer, puisqu'elles rendoient la théorie si défectueuse. Il a employé les observations telles qu'elles ont été faites ; & il a trouvé, à la vérité, quelques inégalités dans vingt-deux différens résultats déduits de l'observation de soixante & six oppositions : mais il a concilié ces différences d'une maniere satisfaisante, en fixant, pour une période de soixante années, une variation en plus & en moins, de 3' dans les moyens mouvemens en longitude, une

M

autre de 49′ dans les mouvemens en anomalie moyenne, & enfin une variation totale de 7′ 20″ dans la plus grande équation du centre. De sorte qu'elle décroît depuis 5° 36′ 20″ jusqu'à 5° 29′ 0″.

M. Jeaurat, ayant ainsi fixé les inégalités périodiques de Jupiter, a établi de nouveau les principaux élémens de sa théorie : alors les déterminations qui différoient le plus entre elles, se sont trouvées d'accord à très peu près.

Les Tables dressées sur ces élémens rectifiés & sur ces inégalités périodiques, ne different que d'environ 2′ depuis 1700, excepté seulement pour les oppositions de 1738 & 1760, dont les erreurs sont de 3′ 26″ & de 3′ 33″. Ces erreurs, qui sont les plus grandes, & qui sont rares quant aux observations faites depuis 1700, sont cependant bien moins considérables que celles que lui ont donné les petites équations de M. Mayer, puisque M. Jeaurat n'a pu représenter les observations qu'à 8′ & 9′ près.

Il a joint à ses Tables un exemple de calcul & un tableau fidele [a] des différentes erreurs de ses Tables, comparées à celles des Tables de M. Cassini. Ce tableau suffit pour en faire l'éloge, en faisant voir qu'elles sont plus exactes que celles de ce célebre Astronome.

[a] Il contient cent vingt-deux oppositions observées depuis l'année 136, jusques & compris celle où nous sommes 1765.



QUATRIEME SECTION.

Théorie du ſecond Satellite.

§. XXX.

La perfection de cette théorie dépend de deux choſes; des équations du lieu, & des variations de l'inclinaiſon. Nous n'aurons égard ici qu'à la premiere, & nous remettrons à traiter de la ſeconde dans la quatrieme Partie de cet Ouvrage.

§. XXXI.

Au moyen des maſſes établies §. XX, nous aurons les équations ſuivantes pour l'expreſſion du rayon vecteur & pour celle de la longitude du ſecond Satellite.

x eſt la longitude moyenne du ſecond Satellite,
y ſon anomalie moyenne,
v ſa longitude vraie,
r le rayon vecteur de l'orbite,
t la longitude moyenne du premier moins celle du ſecond,
t' la longitude moyenne du ſecond moins celle du troiſieme,
t'' la longitude moyenne du ſecond moins celle du quatrieme;

$$r = 1 + e \cos y + 0{,}02016 \cos t - 0{,}03697\, e \cos(t - y);$$
$$- 0{,}01347 \cos 2t' - 0{,}04915\, e \cos(2t' - y)$$

$$v = x - 2e \sin y - 0{,}03936 \sin t - 0{,}00039 \sin t' - 14{,}366\, e \sin(t - y).$$
$$- 0{,}00029 \sin 2t + 0{,}02665 \sin 2t' - 4{,}105\, e \sin(2t - y)$$
$$- 0{,}00006 \sin 3t + 0{,}00015 \sin 3t'$$
$$- 0{,}00013 \sin 4t'$$
$$- 0{,}00001 \sin t''$$

En examinant cette équation, il eſt aiſé de voir qu'il y a deux termes conſidérables qui dépendent des ſinus de t & $2t'$.

Nous avons montré, §. XVII, que ces termes doivent servir à produire l'équation de 1° 9′ 42″, soit en tout, ou en partie. On peut voir de plus, que si on ne suppose pas que l'excentricité soit nulle, les coefficiens de sinus $t - y$ & $2t' - y$ sont si grands, qu'ils doivent donner des équations très sensibles. Il me semble qu'on doit inférer de là, que, puisque M. Wargentin est parvenu à représenter très bien les observations au moyen d'une équation de 1° 9′ 42″, dont la période est de 437 jours, ces deux derniers termes, qui dépendent des sinus $t - y$ & $2t' - y$, doivent être nuls, ou être compris dans cette équation. Mais en les supposant nuls, les termes 0,03936 sin t & 0,02665 sin $2t$ produiroient deux équations dont la somme seroit 3° 46′ 54″, c'est-à-dire, plus du triple de l'équation de M. Wargentin. Les masses que nous avons admises, sont tirées du mouvement des nœuds: elles sont donc nécessaires pour le déduire de la théorie; mais elles sont trop grandes pour en déduire aussi l'équation de M. Wargentin. Il y a donc quelque autre équation qui diminue constamment celles qui dépendent de sin t & sin $2t'$; & il est clair que ce sont celles qui dépendent de sin $t - y$ & sin $2t' - y$.

Je me suis donc permis de supposer que le mouvement de l'apside du second Satellite étoit égal au mouvement moyen de Jupiter. Cette supposition est indiquée par les observations: elle est possible, parceque l'attraction d'un corps de la figure de Jupiter donne un mouvement à l'apside, qui, joint à celui qui est dû aux attractions mutuelles, est plus que suffisant pour la justifier.

§. XXXII.

Nous avons trouvé, §. LV de la seconde Partie, que le mouvement de l'apside $1 - m$ étoit exprimé par $\theta + 2\varepsilon$ —

$A'' - \frac{1}{2} E''$. Les quantités θ & ϵ repréſentent le mouvement de l'apſide dû à la figure de Jupiter, A'' & E'' celui qui eſt dû à l'action d'un Satellite. En conſéquence le mouvement de l'apſide dû au premier ſera 0,00026096,

au troiſieme . . . 7935,
au quatrieme . . . 552,

0,00034583.

Le mouvement du ſecond Satellite étant 1, celui de l'apſide ſera 0,00034583, ou de 13° 9′ 40″ par an, ou 13° 10′ 48″ en y joignant celui qui a été déterminé dans la premiere Partie, & qui eſt dû à l'action du Soleil.

Le mouvement de l'apſide produit par la figure de Jupiter ſera donc de 17° 9′ 46″. Cette quantité ſera une des données qui ſerviront à fixer les coefficiens & les expoſans indéterminés du §. LXI de la ſeconde Partie.

§. XXXIII.

Suppoſant le mouvement de l'apſide égal au mouvement moyen de Jupiter, & ſuppoſant de plus, que l'époque de l'apſide ſupérieure, ou de l'apojove, ſoit à 180 degrés du lieu moyen de Jupiter, nous allons examiner ce que deviennent les quatre termes

$- A \sin t + B \sin 2t - Ce \sin(t - y) - De \sin(2t' - y)$,
en repréſentant par les lettres A, B, C, D, les coefficiens numériques de ces termes.

Soit q la longitude de Jupiter, p ſa longitude vraie, E ſon équation du centre pour un tems quelconque, x la longitude moyenne du Satellite, $x - k \sin t$ ſa longitude vraie, en négligeant toutes les petites équations, & en mettant k pour le coefficient de l'équation de M. Wargentin.

Nous aurons, au moment de la conjonction, $x - k \sin t = p$, & $x = p + k \sin t$. Mais la longitude de l'apojove sera $q + 180°$: donc l'anomalie vraie du second Satellite sera $p + k \sin t - q - 180° = E + k \sin t - 180° = y$. Par conséquent $t - y = t - E - k \sin t + 180°$. On aura donc

$$- A \sin t + B \sin 2t' + Ce \sin(t - E - k \sin t) + De \sin(2t' - E - k \sin t),$$

ou

$$- A \sin t + B \sin 2t' - Ce \sin(E + k \sin t) \cos t + Ce \sin t + De \sin 2t' - De \sin(E + k \sin t) \cos 2t'.$$

Mais comme nous avons reconnu que t est toujours égal à $2t' + 180°$, nous aurons

$$\begin{array}{l} - A \sin t - Ce \sin(E + k \sin t) \cos t. \\ + Ce \quad + De \\ - B \\ - De \end{array}$$

Mettant à la place du sinus de $(E + k \sin t)$, l'angle même, nous aurons

$$\begin{array}{llll} - A \sin t & - CeE \cos t & - \frac{1}{2} Cek \sin 2t. \\ + Ce & + DeE & + \frac{1}{2} Dek \\ - B & & \\ - De & & \end{array}$$

A l'égard du terme $-2e \sin y$, il sera changé en celui-ci, $2e \sin E$. L'équation du §. XXXI deviendra donc

$$\begin{array}{lll} v = x + 2e \sin E - & 0{,}06601 \sin t - 0{,}00039 \sin t' - 10{,}261\, eE \cos t. \\ & + 10{,}261\, e \quad + 0{,}00015 \sin 3t' & \\ & - 0{,}00029 \sin 2t - 0{,}00013 \sin 4t & \\ & - 10{,}261\, ek \sin 2t - 0{,}00001 \sin t'' & \\ & - 0{,}00006 \sin 3t & \end{array}$$

Le terme $\begin{array}{l} - 0{,}06601 \sin t \\ + 10{,}261\, e \end{array}$ est celui qui doit produire l'équation de M. Wargentin. On aura donc, lorsque $\sin t = 1$, $- 0{,}06601 + 10{,}261\, e = - 0{,}02027$; d'où l'on tire $e = 0{,}00456$, qui sera l'excentricité du second Satellite.

J'obſerverai cependant que l'équation 1° 9′ 42″ peut n'être pas exactement celle qui a lieu dans la théorie du ſecond Satellite : elle a été appréciée ſans tenir compte de toutes les autres équations ; & il arrivera peut-être qu'en les introduiſant dans le calcul, il faudra changer le coefficient de celle-ci. Mais ce changement n'influera point ſur les maſſes : il eſt clair qu'il tombera tout entier ſur l'excentricité. Ainſi, ſuppoſé qu'on eût retranché de l'équation de 1° 9′ 42″, un nombre de ſecondes exprimé par δ, l'excentricité ſera

$$0{,}00456 + 0{,}000000473\,\delta.$$

En établiſſant l'excentricité égale à 0,00456, on aura

$$r = 1 - 0{,}00456 + 0{,}03358 \cos t, \ \&$$

$$\begin{aligned} v = x + 31'\,15''\sin E - 1°\,9'\,42''\sin t - 1'\,21''\sin t' - 0{,}04574\,E\cos t. \\ - 0'\,59''\sin 2t + 30''\sin 3t' - 0{,}02287\,k\sin 2t \\ - 12''\sin 3t - 28''\sin 4t \end{aligned}$$

Cette expreſſion eſt celle de la longitude vraie du ſecond Satellite, & il n'y aura d'autre incertitude que celle de la grande équation 1° 9′ 42″. On conſtatera ſa vraie quantité par les obſervations, du moins autant qu'il eſt poſſible de le faire ; & ſi l'on y fait quelque correction, on déterminera l'excentricité qui en réſultera, & on corrigera en conſéquence les coefficiens où entre l'excentricité. L'équation 31′ 15″ ſin E n'excédera pas 3′ 0″, parceque l'angle E n'eſt jamais qu'un angle de 5° 35′.

Il y a dans cette équation un terme qui dépend de deux argumens variables. L'un eſt E, qui eſt l'équation du centre de Jupiter, relative au tems de l'obſervation : elle eſt ſuppoſée poſitive, & conſéquemment il faudra changer le ſigne lorſqu'elle ſera négative. L'autre argument eſt coſinus t. On pourra donc en conſtruire une Table à double entrée.

§. XXXIV.

Le mouvement horaire moyen étant 4° 13′ 26″, le mouvement horaire vrai sera 4° 13′ 26″ — 5′ 10″ cos *t*, ou 4° 13′ 26″ (1 — 0,02039 cos *t*) : mais les variations du mouvement horaire & l'altération du rayon vecteur introduiront nécessairement une équation pour les demi-durées.

Soit l'expression de la demi-durée du §. LXX de la seconde Partie $\frac{3600'' AF}{Ad.a}$, $a = 4° 13' 26'' (1 - 0,02039 \cos t)$, $Ad = 1 - 0,00456 + 0,03358 \cos t$. Donc l'expression de la demi-durée deviendra $\frac{3600'' AF}{4° 13' 26'' (1 - 0,02039 \cos t)(1 - 0,00456 + 0,03358 \cos t)}$ $= \frac{3600'' AF}{4° 13' 26'' (1 - 0,00456)} (1 - 0,01329 \cos t)$.

$\frac{3600'' AF}{4° 13' 26'' (1 - 0,00456)}$ sera la demi-durée moyenne, c'est-à-dire, celle qui a lieu lorsque cos *t* est égal à zero, ou celle que l'on trouve dans les Tables ordinaires.

On la corrigera par une équation qui ira jusqu'à 1′ 8″ lorsque la demi-durée sera de 1ʰ 26′, & à 52″ lorsque la demi-durée ne sera que de 1ʰ 5′.

§. XXXV.

L'équation qui sert à corriger la conjonction trouvée par le moyen de la demi-durée, sera variable, comme l'inclinaison dont elle dépend.

La même chose a lieu à l'égard de la réduction à l'orbite de Jupiter.

Dans les plus petites & les plus grandes inclinaisons, ces quantités seront

Inclinaison.	*Equation des conjonct.*	*Réduct. à l'orbite.*
2° 30′	3′ 16″	1′ 38″,
3° 30′	6′ 17″	3′ 8″.

Comme

Comme ces deux équations dépendent des mêmes argumens, l'inclinaison & la distance au nœud, j'en ai dressé une seule Table à double entrée, dans laquelle il n'y aura de parties proportionnelles à prendre ; que pour les degrés de la distance au nœud ; car il y a un nombre de colonnes pour les différentes inclinaisons, suffisant pour prendre celle qui sera la plus voisine de l'inclinaison qui aura lieu au moment de l'observation.

§. XXXVI.

Ensuite, pour déterminer le moyen mouvement & les époques, j'ai calculé quarante observations comprises entre le premier Octobre 1682 & le 11 Novembre 1705, & seize autres comprises entre le premier Février 1740 & le 10 Octobre 1748.

Il résulte de cet examen, qu'il faut ajouter 3′ 31″ aux époques des Tables de M. Bradley, & diminuer le mouvement annuel de 42′.

Ainsi nous établirons l'époque de 1705, nouveau style,

pour le méridien de Paris	.	.	4ˢ 23° 11′ 26″,
le mouvement annuel étant de	.	.	9ˢ 11° 47′ 18″,
& pour l'année bissextile	.	.	0ˢ 23° 9′ 46″.

§. XXXVII.

La supposition que j'ai faite du mouvement de l'apside, doit être justifiée par l'emploi des équations qui dépendent de l'excentricité. Ces équations sont au nombre de trois. Les deux premieres, 31′ 15″ sin E & 0,02287 k sin $2t$, sont peu considérables : mais celle qui dépend de sinus E & de cosinus t est très grande, puisque, dans son *maximum*, elle va jusqu'à 15′ de degré ; ou plus de 3′ de tems. Quand j'ai essayé de

l'appliquer aux observations, j'ai trouvé qu'il y en avoit quelques-unes qui paroissoient l'admettre, & d'autres la rejetter entiérement. J'ai cru que mon hypothese étoit détruite, & qu'il falloit l'abandonner; cependant, en y réfléchissant, j'ai vu qu'il y avoit des causes d'inégalités qui n'étoient pas encore calculées, faute des élémens nécessaires : telle est l'inégalité optique découverte par M de Fouchy. On verra dans la quatrieme Partie, que la loi des variations de l'inclinaison & celle de la libration du nœud sont assez bien connues pour représenter toutes les demi-durées déduites directement de de l'observation des deux phases. En 1727, par exemple, la demi-durée calculée ne differe de celle qui a été observée le 9 Septembre, que de 1′ 17″. Au mois d'Octobre 1726, les demi-durées étoient trop petites d'environ 4′. Or, si la position du nœud & l'inclinaison sont bonnes pour 1727, il n'est pas possible que dix mois avant elles fussent défectueuses. Il est vrai que les observations du 3 & du 21 Octobre 1726 ont été faites très près de l'opposition, & qu'alors les immersions & les émersions ne peuvent être observées exactement qu'avec quelque difficulté, à cause de l'éclat de Jupiter. Le Satellite entre dans l'ombre trop près de son disque, & sa lumiere est affoiblie par celle de la planete : on doit donc le perdre de vue plutôt, & la demi-durée observée doit être plus longue que celle qui est calculée par les Tables. Mais cette différence de 4′ est trop forte, & je soupçonne que ces erreurs sont produites par une autre cause, ou par la complication de plusieurs causes. J'en vois quatre qui peuvent y contribuer. La premiere naît des plus grandes demi-durées mêmes qui ont été établies sur les observations. On a vu que les demi-durées sont affectées d'une équation qui va quelquefois jusqu'à 1′ 8″; selon le tems où les observations ont été faites,

les demi-durées qu'il en falloit conclure, n'ayant pas été corrigées de l'effet de cette équation, peuvent être ou trop petites ou trop grandes. Secondement, la grande équation de 1° 9′ 42″ a peut-être beſoin de quelques corrections ; & je ferai voir, ſur un certain nombre d'obſervations qui ſeront calculées à la fin de cet Ouvrage, que la plus grande partie ſeroit mieux repréſentée, ſi elle étoit diminuée d'un dixieme environ. Troiſiémement, les équations produites par l'excentricité & par le mouvement d'apſide ſuppoſé, rapprochent ſouvent le calcul de l'obſervation ; & ſi elles l'éloignent quelquefois, c'eſt ſans doute dans les circonſtances où les autres cauſes agiſſent davantage. Quatriémement, comme la diſpoſition d'un Satellite ne peut être inſtantanée, que ſa lumiere diminue par degrés, il doit ceſſer d'être viſible lorſque la partie éclairée n'eſt plus aſſez grande pour faire impreſſion ſur l'œil de l'Obſervateur : mais quand l'Obſervateur eſt près, il n'eſt pas néceſſaire que cette partie éclairée ſoit ſi grande que lorſqu'il eſt plus loin. Il doit donc y avoir pour les demi-durées une équation qui dépende de la diſtance de Jupiter à la Terre. Nous n'avons point d'élément pour établir la quantité de cette équation ; & juſqu'à ce qu'elle ſoit connue, on ne peut décider ſi l'hypotheſe du mouvement de l'apſide & les équations qui naiſſent de l'excentricité doivent être admiſes ou rejettées. Le parti que nous prendrons dans ce moment-ci, eſt de reſter en ſuſpens ſur ce point. Les maſſes paroiſſent aſſez bien déterminées par les mouvemens du nœud : ces maſſes produiroient des équations beaucoup trop fortes, & la plus petite excentricité introduit des équations aſſez conſidérables ; Il eſt donc naturel de croire que celles-ci réduiſent celles-là à la quantité de l'équation de M. Wargentin ; & il me paroît difficile de ſe refuſer à une ſuppoſition auſſi vraiſemblable &

aussi néceſſaire. Mais comme cette ſuppoſition produit des équations qui, dans certains cas, éloignent beaucoup le calcul de l'obſervation, nous n'en ferons point uſage juſqu'à ce que les autres cauſes aient été ſuffiſamment connues & appréciées.

CINQIEME SECTION.

Théorie du troiſieme Satellite.

§. XXXVIII.

LA PERFECTION de la théorie de ce Satellite dépend, comme celle de la théorie du ſecond, des équations du lieu, & des demi-durées. Nous ne traiterons de celles-ci que dans la quatrieme Partie, & nous nous attacherons ſeulement ici à déterminer le moyen mouvement, l'excentricité, & les équations produites par les perturbations.

§. XXXIX.

Nommant x la longitude moyenne du troiſieme Satellite,
v ſa longitude vraie,
r le rayon de ſon orbite,
y ſon anomalie moyenne,
t la longitude moyenne du premier moins celle du troiſieme,
t' la longitude moyenne du ſecond moins celle du troiſieme,
t'' la longitude moyenne du troiſieme moins celle du quatrieme;

on aura les équations ſuivantes, en négligeant les termes trop

petits : $r = 1 + e \cos y - 0,00014 \cos t - 0,00063 \cos t' + 0,00015 \cos 2t''$,

$$v = x - 2e \sin y + 25'' \sin t - 4' 10'' \sin t' - 0' 17'' \sin t'' - 6'' \sin 2t' + 0' 59' \sin 2t'' - 0,2642\, e \sin (t' - y).$$

§. XL.

C'est par un tâtonnement que j'ai fixé la quantité des équations qui dépendent des sinus t'' & $2t''$, & conséquemment la valeur de la masse du quatrieme. Au moyen des quantités numériques du §. XI, on pourra recommencer le calcul, si on le juge à propos ; mais je ne crois pas que la masse du quatrieme differe beaucoup de celle que j'ai établie §. XXI.

A l'égard de l'équation du centre, c'étoit par l'examen d'un grand nombre d'observations qu'elle devoit être déterminée. Les Tables de M. Wargentin renferment une équation de 8' de tems, ou de 16' 46" de degrés, dont la période est de 12 ans & demi. C'est visiblement une équation du centre & qui suppose une apside mobile, dont le mouvement est de 1° 36' par an.

M. Maraldi m'a dit aussi il y a long-tems, qu'il soupçonnoit que le troisieme avoit une équation du centre, & que le mouvement annuel de son apside étoit d'environ 1° 30'.

Après avoir calculé un assez grand nombre d'observations, & les avoir dépouillées de l'effet des petites équations du Paragraphe précédent, il m'a paru nécessaire d'établir une équation du centre de 10', & de donner à l'apside un mouvement d'environ 2° par an. Je dis d'environ 2°, parcequ'il m'a paru que ce mouvement pouvoit être augmenté, sans que les observations en fussent beaucoup plus mal représentées. Le tems & le travail établiront cet élément avec plus d'exactitude.

Il résulte de là, que l'expression du rayon vecteur & celle de la longitude vraie deviendront celles-ci,

$$r = 1 + 0,00145 \cos y - 0,00014 \cos t - 0,00063 \cos t' + 0,00015 \cos t'',$$

$$v = x - 10' \sin y + 15 \sin t - 4' 10'' \sin t' - 17'' \sin t' - 6'' \sin 2t' + 59'' \sin 2t'' - 1' 19'' \sin (t' - y).$$

L'équation de 16′ 46″ ne peut représenter les observations d'une maniere satisfaisante. M. Wargentin a vu qu'elles demandoient une correction de 16′ 46″: & comme la plus grande partie de cette correction, qui est notre équation du centre, a une période d'environ 12 ans & quelques mois, faute de connoître la loi des différentes inégalités qui composent cette inégalité totale, il a assigné au tout la marche que suit la plus grande partie.

En effet, on peut voir que la somme de toutes les équations précédentes ne s'éloignera pas beaucoup de l'équation de 16′ 46″; car, en supposant $t = 270°$, $y = 75°$, $t' = 105°$, $t'' = 135°$, la somme des équations sera 16′ 11″, qui ne differe que de 35″ de l'équation de M. Wargentin. Peut-être, en calculant toutes les observations, trouvera-t-on que l'équation du centre peut être augmentée de 30″ à 40″.

§. XLI.

Nous n'avons pris que les observations des éclipses où les deux phases ont été observées : c'est le moyen d'éviter l'incertitude des demi-durées. D'ailleurs, si, par la différence des vues ou des lunettes, un Observateur voit plus tard l'immersion, il verra plutôt l'émersion; & l'instant de la conjonction sera toujours assez exactement déterminé. M. Maraldi a bien voulu me communiquer la suite des observations qu'il a recueillies.

J'ai calculé, sur les Tables de M. Bradley, trente-trois observations comprises entre le 27 Janvier 1740 & le 10 Mai 1754.

Le calcul de la longitude héliocentrique de Jupiter a été fait sur les Tables de M. Cassini, & corrigé par le moyen des observations, comme je l'avois fait pour les observations du premier & du second Satellites.

J'ai trouvé que l'erreur des Tables, qui alloit jusqu'à 53', étoit toujours négative; j'en ai conclu que l'époque n'étoit pas assez avancée, & j'ai reconnu qu'il falloit y ajouter 19' 31", pour rendre les erreurs alternativement positives & négatives.

Ensuite, pour rectifier les moyens mouvemens, j'ai calculé vingt-trois observations comprises entre le 6 Décembre 1702 & le 19 Février 1721 : j'ai vu alors que les époques non-corrigées représentoient beaucoup mieux les observations. Cela m'a fait connoître que le mouvement annuel de M. Bradley étoit trop lent de 32" par an.

Après avoir combiné & examiné toutes ces observations, j'ai établi le mouvement annuel de 0ˢ 5° 56' 32",
pour l'année bissextile . . 1ˢ 26° 15' 35".

J'ai ajouté 3' 21" à l'époque pour l'année 1700 : ainsi l'époque de cette année, nouveau style, & réduite au méridien de Paris, sera dans 5ˢ 13° 2' 56".

M. Maraldi m'a communiqué depuis, qu'il établissoit l'époque de 1700 . . . . 5ˢ 13° 1' 43",
& le moyen mouvement annuel . . 0ˢ 5° 56' 29" ½.
J'ai eu la satisfaction de m'être rencontré avec lui dans les mêmes déterminations. Je soupçonne que son mouvement annuel est plus exact que le mien; mais je remets cet examen à un autre tems.

§. XLII.

Le mouvement horaire moyen étant $2^\circ\ 5'\ 48''$, le mouvement horaire vrai sera $2^\circ\ 5'\ 48'' - 22''\cos y - 9''\cos t'$; & l'expression de la demi-durée

$$\frac{3600''\ AF}{2^\circ\ 5'\ 48''}(1 + 0{,}00146\ \cos y + 0{,}00186\ \cos t').$$

La somme de ces deux équations, même pour les plus grandes demi-durées, iroit à peine à 20″ dans les cas extrêmes, & est par conséquent très négligeable, parceque je ne crois pas qu'on puisse déterminer les demi-durées du troisieme à 20″ près.

§. XLIII.

L'équation des conjonctions & la réduction à l'écliptique, variables comme l'inclinaison, seront, lorsqu'elle sera de $2^\circ\ 48'$ . . $4'\ 6''$ & $2'\ 3''$; quand l'inclinaison sera de $3^\circ\ 20'$ . . $5'\ 41''$ & $2'\ 51''$. J'en ai dressé une Table à double entrée, comme celle de la théorie du second Satellite.

§. XLIV.

Nous allons voir maintenant ce que la théorie donne pour le mouvement annuel de l'apside, & nous aurons les quantités suivantes.

Par l'action du premier . .	$1^\circ\ 36'\ 39''$,
du second . . .	17 39,
du quatrieme . . .	15 30,
du Soleil	2 15,
	$2^\circ\ 12'\ 3''$.

$2^\circ\ 12'\ 3''$ est donc la quantité du mouvement de l'apside, produite par l'action des Satellites & du Soleil, en laissant à part celui qui peut être dû à la figure de Jupiter. Ce mouvement

vement surpasse de 12′ celui que j'ai déduit des observations : mais je suis convaincu qu'elles permettront d'établir un mouvement plus grand que 2′, qui est celui que j'ai supposé dans mes Tables. Mon premier objet a dû être de représenter les observations avec le plus d'exactitude possible ; mais, faute de temps, je n'ai pu examiner ce qui résulteroit d'un mouvement un peu plus grand.

Quand on aura discuté & éclairci ce point, on saura quelle partie de ce mouvement doit être attribuée à la figure de Jupiter, & on aura une nouvelle donnée pour connoître les indéterminées qui représentent les variations de la densité de Jupiter.

Quant à l'époque du lieu de l'apojove, elle m'a paru être, le premier Janvier 1700, dans 11ˢ 13° 0′.

SIXIEME SECTION.

Théorie du quatrième Satellite.

JE COMPTOIS faire imprimer à la suite de mes Tables, celles que M. Maraldi a dressées sur les observations du quatrieme ; mais quand je lui ai demandé son agrément, il m'a répondu que les moyens mouvemens n'étoient pas encore suffisamment bien déterminés ; que, dans la recherche de l'équation du centre, il avoit supposé ceux de M. Cassini ; mais que maintenant, en supposant l'équation du centre, il falloit rechercher le moyen mouvement. Ses affaires ne lui permettant point de se livrer à ce travail dans ce moment, il a bien voulu m'en laisser le soin.

J'ai donc examiné un certain nombre d'observations dont les longitudes ont été dépouillées de l'effet des perturbations

du Soleil calculées dans la premiere Partie, corrigées par l'équation des conjonctions, & réduites à l'écliptique de Jupiter. J'ai comparé la longitude du Satellite, ainsi calculée, à celle de Jupiter, corrigée comme je l'ai expliqué §. XXIX; & j'ai trouvé que les moyens mouvemens du quatrieme Satellite étoient suffisamment exacts, mais que l'équation du centre étoit trop grande. Je l'ai diminuée d'environ un dixieme, & réduite par conséquent à $50' \, 20''$ [a].

§. XLV.

Alors nommant x la longitude moy. du quatrieme Satellite,
v sa longitude vraie,
y son anomalie moyenne,
r le rayon vecteur de l'orbite,
t la longitude moy. du quatrieme moins celle du Soleil vue de Jupiter,
t' la longitude moy. du troisieme moins celle du quatrieme;

on aura

$$r = 1 + 0,00727 \cos y - 0,000014 \cos 2t + 0,000163 \cos t' + 0,000065 \cos(2t - y)$$

$$v = x - 50' \, 20'' \sin y + 4'' \sin 2t - 12'' \sin t' - 7'' \sin 2t'. + 33'' \sin 2y - 27'' \sin(2t - y) + 1' \, 49'' \sin(2t - 2y)$$

Les équations $4'' \sin 2t$, $12'' \sin t'$, $7'' \sin 2t$ sont très négligeables : nous pourrons même, pour simplifier, faire $t = 0$,

[a] Il faudroit en conséquence recommencer le calcul des perturbations du Soleil, fait dans la premiere Partie. Je supposois alors l'excentricité de 0,00813, telle que M. Maraldi me l'avoit donnée. En réduisant l'équation du centre à $50' \, 20''$, l'excentricité n'est plus que 0,00727; & cela doit changer un peu les perturbations du Soleil : mais comme les équations ne peuvent être diminuées que d'environ un dixieme, nous ne nous y arrêterons point dans ce moment-ci.

parceque les éclipses des Satellites sont les seules observations dont on fasse usage, & qu'alors la longitude du Satellite differe de six signes de celle du Soleil, vue de Jupiter. Alors on aura $v = x - 50' 20'' \text{ sin } y - 1' 16'' \text{ sin } 2y.$

$$+ 33'' \text{ sin } y$$

Je devrois naturellement diminuer l'équation du centre de 33''; mais je supprime cette équation, parceque les observations m'ayant donné elles-mêmes la vraie quantité de l'équation du centre, je dois penser que cette correction étoit comprise dans celles que j'y ai faites. Ainsi l'équation de la longitude vraie sera $v = x - 50' 20'' \text{ sin } y - 1' 16'' \text{ sin } 2y.$

§. XLVI.

L'équation des conjonctions sera de 3' 1'', & la réduction à l'écliptique de 1' 30'', constantes, parceque l'on ne connoît pas encore de variations dans l'inclinaison.

Le mouvement horaire moyen étant 53' 56'', le mouvement horaire vrai sera $53' 56'' - 1' 3'' \text{ cos } y$, & la demi-durée vraie $\frac{3600'' AF}{53' 56''} (1 + 0{,}01212 \text{ cos } y)$. De façon que, lorsque la demi-durée sera la plus grande, c'est-à-dire, de 2^h 23', & que y sera égale à zero, l'équation sera de 1' 44''.

§. XLVII.

A l'égard du mouvement de l'apside, il a été déterminé par M. Maraldi de 45' 7''.

On aura par l'action du premier	. .	7' 45'',
du second	. .	1 13,
du troisieme	. .	31 6,
du Soleil	. .	5 14.

La quantité annuelle de ce mouvement, 45' 18'', sera précisément, ou à très peu près, celle que M. Maraldi a déduite

des obſervations. Une des conditions néceſſaires pour déterminer les coefficiens indéterminés de la loi de la denſité de Jupiter, ſera donc que le mouvement d'apſide dû à la figure & à la denſité de cette planete, ſoit nul pour le quatrieme Satellite.

§. XLVIII.

Je ſens bien que ces théories des quatre Satellites n'ont pas toute la perfection qu'on en peut attendre : tous les élémens ont beſoin d'être diſcutés avec plus de ſoin que je n'ai pu en mettre ici. J'ai vu le mieux ; mais, faute de tems, j'ai été forcé de me contenter de l'eſpérance d'y atteindre un jour. Mon but a été de faire voir que les mouvemens des Satellites de Jupiter ſuivoient les mêmes loix que les autres planetes du ſyſtême du monde. Heureux ſi l'on trouve que j'y aie réuſſi !



QUATRIEME PARTIE.

Du mouvement des Nœuds, & de la variation de l'Inclinaison.

PREMIERE SECTION.

PROBLÊME I.

TROUVER le mouvement des nœuds d'un Satellite, en vertu des perturbations d'un autre Satellite.

§. I.

M. Clairaut [a] trouve que, si l'on nomme Σ la force qui agit toujours parallélement à ST, l'expression du mouvement du nœud sera, $\frac{\Sigma dt^2}{r dv}$ sin LTN sin $ST\Omega$.

Pour simplifier cette expression [*fig.* 8.], 1°. nous supposerons, dans le cas présent, les orbites circulaires, & conséquemment la longitude moyenne, proportionnelle au tems, égale à la vraie. On aura donc $dt = dx = dv$, & l'expression du mouvement du nœud, Σdx sin LTN sin $ST\Omega$.

2°. Parceque les angles d'inclinaison des plans des Satellites n'excedent jamais un degré, & sont presque toujours au-dessous de 40′, nous supposerons qu'un angle pris sur une des orbites ne change pas sensiblement de valeur, lorsqu'on le projette sur l'autre.

§. II.

La force qui agit suivant ST sera $-O\left(\frac{ST}{SL^3} - \frac{1}{ST^2}\right)$: mais

[a] Théorie de la Lune, page 62.

$SL^{-3} = A + B \operatorname{cof} t + C \operatorname{cof} 2t + D \operatorname{cof} 3t$; l'expreſſion du mouvement du nœud deviendra donc $- O.\ ST.\ dx$

$$\text{fin}\, LTN\, \text{fin}\, ST\Omega \left\{ \begin{array}{l} A + B \operatorname{cof} t + C \operatorname{cof} 2t + D \operatorname{cof} 3t \\ -\frac{1}{ST^3} \end{array} \right\}.$$

L'angle LTN eſt la diſtance du Satellite à ſon nœud. Si l'on nomme ω le mouvement du nœud pendant une révolution, celui du Satellite étant 1, l'angle LTN ſera $(1 + \omega)\, x$.

On trouvera de même l'angle $ST\Omega$, qui eſt la diſtance du Satellite perturbateur au nœud des deux orbites, égal $(1 \pm n + \omega)\, x$; l'angle t étant toujours exprimé par nx. Le ſigne + eſt pour le cas d'un Satellite intérieur, le ſigne — pour celui d'un Satellite extérieur.

§. III.

Nous obſerverons d'abord, qu'il n'y a que les termes dont les coefficiens ont de très petits diviſeurs, qui puiſſent produire quelques équations ſenſibles, s'il doit y en avoir. Ainſi nous excluerons abſolument les termes où entrent les coſinus nx, $2nx$, $3nx$, $(2 + n + 2\omega)\, x$, $(2 + 2n + 2\omega)\, x$, &c.

Mettant les valeurs de ſin LTN & ſin $ST\Omega$ dans l'expreſſion du mouvement du nœud du Paragraphe précédent, réduiſant & intégrant, on aura le mouvement du nœud, dans le cas des perturbations d'un Satellite intérieur,

$$= \tfrac{1}{4}\, O.\ ST \left\{ \begin{array}{l} Bx - \frac{C}{2 - n + 2\omega} \text{fin}\, (2 - n + 2\omega)\, x \\ - \frac{D}{2 - 2n + 2\omega} \text{fin}\, (2 - 2n + 2\omega)\, x \end{array} \right\};$$

dans le cas des perturbations d'un Satellite extérieur,

$$= \tfrac{1}{4}\, O.\ ST \left\{ \begin{array}{l} Bx - \frac{B}{2 - 2n + 2\omega} \text{fin}\, (2 - 2n + 2\omega)\, x \\ \frac{C}{2 - 3n + 2\omega} \text{fin}\, (2 - 3n + 2\omega)\, x \\ \frac{D}{2 - 4n + 2\omega} \text{fin}\, (2 - 4n + 2\omega)\, x \end{array} \right\}.$$

$-\frac{3}{4} O.B.ST$ exprimera le moyen mouvement du nœud, O étant la maſſe du Satellite perturbateur, & ST le rayon de ſon orbite exprimé en parties du rayon de l'orbite du Satellite troublé, pris pour unité.

§. IV.

PROBLÊME II.

Trouver la variation de l'inclinaiſon de l'orbite, c'eſt-à-dire, la variation de l'angle qui meſure l'inclinaiſon du plan de l'orbite du Satellite perturbateur ſur l'orbite du Satellite troublé.

M. Clairaut déduit l'équation ſuivante des principes de la théorie de la Lune.

Nommant I l'inclinaiſon; & q le mouvement du nœud,

$$\frac{dI}{\sin I} = -\cot LT\Omega \, dq,$$

$$\frac{dI}{\sin I} = -\Sigma dx \cot LT\Omega \sin LT\Omega \sin ST\Omega,$$

$$\frac{dI}{\sin I} = -O.ST.dx \cos LT\Omega \sin ST\Omega \left\{ \begin{array}{l} A + B\cos t + C\cos 2t \\ -\frac{1}{ST^3} \qquad + D\cos 3t \end{array} \right\}.$$

§. V.

En faiſant la multiplication de ces quantités, on trouvera, après avoir négligé les termes qui l'ont été dans la détermination du mouvement du nœud, dans le cas des perturbations d'un Satellite intérieur,

$$\int \frac{dI}{\sin I} = \frac{3}{4} O.ST.dx \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2 - n + 2\omega} \cos(2 - n + 2\omega)x \\ + \frac{D}{2 - 2n + 2\omega} \cos(2 - 2n + 2\omega)x \end{array} \right\};$$

dans le cas des perturbations d'un Satellite extérieur,

$$\int \frac{dI}{\sin I} = \frac{1}{4} O.ST \left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{2-2n+2\omega} \cos(2-2n+2\omega)x \\ + \frac{C}{2-3n+2\omega} \cos(2-3n+2\omega)x \\ + \frac{D}{2-4n+2\omega} \cos(2-4n+2\omega)x \end{array} \right\}.$$

§. VI.

Faisant $\int \frac{dI}{\sin I} = A$, à cause de la petitesse de l'inclinaison, on peut regarder $\sin I$ comme égal à $I - \frac{1}{6} I^3$. Donc $\int \frac{dI}{\sin I} = \int \frac{dI}{I} + \frac{1}{6} I dI$. Intégrant, & complétant l'intégrale, on a $A = \log. I + \frac{1}{12} I^2 - \text{l}. h$, ou $\log. I = A - \frac{1}{12} I^2 + \text{l}. h$, & $I = h C^{A - \frac{1}{12} I^2}$. Mais $C^{A - \frac{1}{12} I^2} = 1 + A - \frac{1}{12} I^2$, en négligeant tous les autres termes: donc $I = h(1 + A - \frac{1}{12} I^2)$; & en mettant, pour I^2, sa valeur approchée $h^2(1 + 2A)$, nous aurons $I = h(1 - \frac{1}{12} h^2 + A - \frac{1}{6} A h^2)$. Donc nommant f la quantité $h(1 - \frac{1}{12} h^2)$, ou l'inclinaison moyenne, l'inclinaison vraie sera, en remettant la valeur de A & négligeant le dernier terme $\frac{1}{6} A h^2$, dans le cas des perturbations d'un Satellite intérieur,

$$I = f \left[1 + \frac{1}{4} O.ST \left(\frac{C}{2-n+2\omega} \cos(2-n+2\omega)x + \frac{D}{2-2n+2\omega} \cos(2-2n+2\omega)x \right) \right];$$

dans le cas des perturbations d'un Satellite extérieur,

$$I = f \left[1 + \frac{1}{4} O.ST \left(\frac{B}{2-2n-2\omega} \cos(2-2n+2\omega)x + \frac{D}{2-4n+2\omega} \cos(2-4n+2\omega)x \right) \right].$$



§. VII.

§. VII.

L'application de ces formules est aisée à faire, en rappellant les quantités numériques établies dans la seconde Partie, & les masses des Paragr. XIII, XX, XXI de la troisieme.

THÉORIE DU PREMIER.

Perturbations du quatrieme.

ω . . . 0,00000046. Donc mouv. annuel du nœud 2′ 3″, 6.

Perturbations du troisieme.

ω . . . 0,00000846. Mouvement annuel 37′ 44″.

Perturbations du second.

ω . . . 0,00001028. Mouvement annuel 45′ 49″.

§. VIII.

THÉORIE DU SECOND

Perturbations du quatrieme.

ω . . . 0,00000217. Mouvement annuel du nœud 4′ 39″.

Perturbations du troisieme.

ω . . . 0,00006369 Mouvement annuel 2° 21′ 21″.

Perturbations du premier.

ω . . . 0,0002607. Mouvement annuel 9° 38′ 40″.

§. IX.

THÉORIE DU TROISIEME.

Perturbations du quatrieme.

ω . . . 0,00001407. Mouvement annuel du nœud 15′ 30″.

Perturbations du ſecond.

ω . . 0,0000161. Mouvement annuel 17′ 44″.

Perturbations du premier.

ω . . 0,0000543. Mouvement annuel 59′ 51″.

§. X.

THÉORIE DU QUATRIEME.

Perturbations du troiſieme.

ω . . 0,0000660. Mouvement annuel 31′ 6″.

Perturbations du ſecond.

ω . . 0,0000026. Mouvement annuel 1′ 13″.

Perturbations du premier.

ω . . 0,0000143. Mouvement annuel 6′ 34″.

§. XI.

Nous avons négligé toutes les équations du mouvement du nœud, parceque ce mouvement devant être rapporté à l'écliptique de Jupiter, une équation, même d'un degré, ne changeroit que de quelques minutes le lieu du nœud.

§. XII.

EQUATIONS DE L'INCLINAISON.

Perturbations du premier ſur le ſecond.

Nous ſuppoſerons que l'inclinaiſon mutuelle des deux orbites eſt d'environ 30′. Nous aurons alors

$$I = 30'(1 - 0,0091 \text{ coſ}(2 - 2n + 2\omega)x,$$

ou . . $I = 30' - 16'' \text{ coſ}(2 - 2n + 2\omega)x.$

A l'égard des perturbations du troisieme, on aura

$$I = 30' - 5'' \operatorname{cos}(2 - 2n + 2\omega)x.$$

Nous avons fait l'épreuve de ces formules sur la théorie du second, parceque c'est dans celle-là que les équations doivent être les plus grandes.

Nous pourrons donc, sans craindre aucune erreur sensible, regarder comme constante l'inclinaison de l'orbite du Satellite troublé sur celle du Satellite perturbateur, & le moyen mouvement du nœud, établi dans les Paragraphes précédens, comme le seul qui ait lieu dans ces théories, en négligeant les petites équations qui peuvent le modifier.

SECONDE SECTION.

§. XIII.

Le mouvement des nœuds, déterminé dans la Section précédente, est toujours rétrograde, & se fait sur l'orbite du Satellite perturbateur. M. de la Lande [a], en examinant le mouvement que la théorie donne aux nœuds des planetes de notre systême, a déja fait voir que ce mouvement rétrograde sur l'orbite de la planete perturbatrice devenoit souvent direct, lorsqu'on le rapportoit à l'écliptique : mais jusqu'aujourd'hui nous n'avions encore aucune lumiere sur la cause de la variation de l'inclinaison des Satellites.

La variation de l'inclinaison des Satellites de Jupiter est un des phénomenes singuliers du systême du monde. La théorie fait voir que les nœuds sont mobiles, & l'inclinaison constante : l'observation au contraire a donné jusqu'ici l'inclinaison

[a] Mémoires de l'Académie, ann. 1758, 1762.

variable, & les nœuds fixes. Mais l'inclinaiſon, que nous venons de démontrer ſenſiblement conſtante, eſt l'inclinaiſon mutuelle des orbites des deux Satellites; & celles que l'obſervation a fait reconnoître variables, ſont les inclinaiſons des Satellites ſur l'orbite de Jupiter.

J'ai montré, dans les Mémoires de l'Académie, ann. 1765, que la ſeule cauſe de la variation de l'inclinaiſon étoit le mouvement des nœuds ſur l'orbite du Satellite perturbateur, & que ce mouvement, rapporté à l'orbite de Jupiter, y donnoit aux nœuds un mouvement de libration très ſenſible par les obſervations.

§. XIV.

Soit [*fig.* 9.] AC l'orbite de Jupiter, AB celle du Satellite perturbateur, BC celle du Satellite troublé, dont le nœud B eſt rétrograde de A en B.

Etant donnée l'inclinaiſon du Satellite perturbateur, que j'appelle A; l'angle d'inclinaiſon des deux orbites, que j'appelle B; & le mouvement AB du nœud B pendant un tems quelconque : on aura, par la trigonométrie ſphérique,

$$\text{tang}\, AC = \frac{\text{tang}\, B \,\text{ſin}\, AB}{\text{tang}\, B \,\text{coſ}\, A \,\text{coſ}\, AB + \text{ſin}\, A},$$

$$\text{coſ}\, C = \text{coſ}\, B\,(\,\text{coſ}\, A - \text{ſin}\, A \,\text{tang}\, B \,\text{coſ}\, AB\,).$$

§. XV.

La premiere de ces formules nous fait connoître, 1°. que le ſinus de AB étant multiplié par la tangente d'un fort petit angle, la tangente de AC ne ſera jamais très grande, & que la valeur de AC ſera toujours fort au-deſſous de celle de AB; 2°. que la tangente de AC, croiſſant juſqu'à ce que

AB soit de 90°, croîtra encore au-delà, parceque le cosinus de AB, devenu négatif, diminuera le dénominateur.

J'ai déterminé la plus grande valeur de AC par les regles *de maximis*, & j'ai trouvé que l'arc AC étoit le plus grand, lorsque sin $AB = \sqrt{1 - \frac{\text{tang}^2 B}{\text{tang}^2 A}}$. Le nœud C paroîtra donc avoir un mouvement de libration autour du point A; c'est-à-dire que, tandis que le point B parcourra le premier quart de sa révolution à-peu-près, & jusqu'à ce que sinus AB soit égal $\sqrt{1 - \frac{\text{tang}^2 B}{\text{tang}^2 A}}$, le nœud C s'éloignera du point A, & aura un mouvement rétrograde. Il deviendra direct, & se rapprochera du point A, où il coïncidera lorsque B aura parcouru 180°. Il continuera d'être direct, en s'éloignant du point A de l'autre côté, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à son *maximum*. Enfin il reprendra le mouvement rétrograde pour revenir au point A, où il se confondra, lorsque B, ayant achevé sa révolution, s'y confondra lui-même.

En même tems, la seconde formule nous fait connoître que l'angle C diminuera pendant la premiere demi-révolution du nœud B. Alors l'angle C sera devenu plus petit que l'angle A, & de la même quantité dont il le surpassoit au commencement du mouvement. Il croîtra ensuite pendant l'autre demi-révolution du nœud B, jusqu'à ce qu'il ait atteint la premiere valeur qu'il avoit au commencement du mouvement.

§. XVI.

Mais il ne faut pas croire qu'il y ait un tel rapport entre le mouvement du nœud & la variation de l'inclinaison, que ce soit précisément au point où l'inclinaison de l'orbite du Satellite troublé se trouve égale à celle du Satellite pertur-

bateur, que le nœud cesse d'être rétrograde ou direct, pour devenir direct ou rétrograde.

Le nœud n'est pas encore parvenu au terme de sa rétrogradation, lorsque les deux inclinaisons sont égales : il est aisé de s'en assurer en considérant les formules.

Les deux inclinaisons étant égales, on aura $\cos C = \cos B$ ($\cos C$ — $\sin C \cos AB \tan B$). Donc $\cos AB = \frac{\cos C(\cos B - 1)}{\sin C \tan B}$, & $\sin AB = \sqrt{1 - \frac{(\cos B - 1)^2}{\tan^2 C \tan^2 B}}$, sinus d'un angle qui surpasse 90°, parceque son cosinus est négatif.

Mais si le nœud B étoit en même tems stationnaire, on auroit $\sin AB = \sqrt{1 - \frac{\tan^2 B}{\tan^2 C}}$. On auroit donc par conséquent $-\frac{\tan^2 B}{\tan^2 C} = -\frac{(\cos B - 1)^2}{\tan^2 B \tan^2 C}$, ou $\tan^2 B = \cos B - 1$, ou $\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = \cos B - 1$, ou $\sin^2 B = \cos^3 B - \cos^2 B$, ou $1 - \cos^2 B = \cos^3 B - \cos^2 B$, & $1 = \cos^3 B$; ce qui est absurde. Et comme il s'ensuit de là que $\sin AB = \sqrt{1 - \frac{(\cos B - 1)^2}{\tan^2 C \tan^2 B}}$ est plus grand que $\sin AB = \sqrt{1 - \frac{\tan^2 B}{\tan^2 C}}$, il est démontré que les deux inclinaisons sont égales avant que le nœud ait atteint le terme de sa rétrogradation.



TROISIEME SECTION.

Application à la théorie du ſecond Satellite.

§. XVII.

La méthode la plus directe pour déterminer le mouvement du nœud d'un Satellite ſur l'orbite de Jupiter, & la variation de l'inclinaiſon de l'orbite de ce Satellite ſur celle de la planete, auroit été de conſidérer dans la ſolution même ces mouvemens & ces variations relativement à cette orbite, & non pas à celle du Satellite perturbateur : mais il auroit fallu trouver une méthode particuliere ; & j'avoue que le tems qui me reſtoit m'a paru trop court pour me livrer à cette recherche, qui demande une analyſe profonde, maniée avec beaucoup d'art.

Je me ſuis donc reſtreint à apprécier les effets des mouvemens particuliers ſur chaque orbite, réduits à celle de Jupiter. La comparaiſon qu'on pourra faire de mes réſultats avec ceux qui auront été trouvés par une méthode directe, prouvera ſi j'ai atteint au but, ou ſi je m'en ſuis écarté.

§. XVIII.

A l'égard de la théorie du ſecond, voici les ſuppoſitions que j'ai cru pouvoir me permettre pour ſimplifier le cas qu'il s'agiſſoit d'examiner. 1°. J'ai ſuppoſé que les nœuds du premier & du troiſieme Satellites coïncidoient au même point de l'orbite de Jupiter. On verra dans la quatrieme Section, que les nœuds du troiſieme ont, autour des nœuds du premier, un mouvement de libration, & que ce mouvement ne les écartera jamais de plus de 3 à 4 degrés. 2°. J'ai ſuppoſé que

le mouvement des nœuds, résultant de l'action du premier & du troisieme, & qui a lieu en partie sur l'orbite du premier & en partie sur celle du troisieme, se faisoit sur l'orbite seule du premier. Je me suis assuré d'abord, que les observations étoient assez bien représentées par cette supposition : ensuite, en calculant par la trigonométrie sphérique le mouvement du nœud & l'inclinaison sur l'orbite de Jupiter, résultans des mouvemens qui se faisoient sur les deux orbites; je me suis convaincu que les différentes positions du nœud ne différoient pas sensiblement de celles que j'avois déduites de ma supposition. L'inclinaison seulement souffre des variations un peu plus grandes.

§. XIX.

Soit [*fig.* 10.] AC l'orbite de Jupiter, AB celle du premier Satellite, CB celle du second, AE celle du troisieme, n étant le mouvement annuel du nœud E sur AE.

Pour avoir égard à la différence dans la variation de l'inclinaison, indiquée au Paragraphe précédent, nous considérerons que le mouvement du nœud E sur AE, en faisant toujours l'angle E constant, a deux effets. L'un est de transporter l'orbite BC le long de AB. Nous ne nous y arrêterons point, parceque le calcul nous a fait connoître que nous pouvions, sans erreur sensible, supposer que ce mouvement se faisoit sur l'orbite AB, en se joignant à celui qui y a lieu naturellement. L'autre effet est d'altérer un peu l'angle B. C'est de celui-ci que nous allons tenir compte, en ayant recours aux formules différentielles de Côtes.

On a $d.AE : dB :: R : f.BAE.f.AB$. Prenant pour $f.BAE$ le petit angle même de l'inclinaison des deux plans, que nous appellerons λ, & pour n le mouvement annuel du nœud

nœud E, nous aurons pour la variation de B dans une année, aſſez exactement $n \lambda$ ſin AB.

n eſt $2° \ 21' \ 20''$; & l'on verra dans la troiſieme Partie; que λ eſt de $12' \ 30''$.

On aura donc, pour les trente années de la période;

0	+ 0′ 0″	30
1	+ 0 6	29
2	+ 0 19	28
3	+ 0 37	27
4	+ 1 0	26
5	+ 1 27	25
6	+ 1 57	24
7	+ 2 28	23
8	+ 2 58	22
9	+ 3 27	21
10	+ 3 54	20
11	+ 4 17	19
12	+ 4 35	18
13	+ 4 47	17
14	+ 4 52	16
15	+ 4 54	15;

quantité toujours additive à l'angle B.

§. XX.

Il s'agit de voir maintenant ſi les obſervations confirmeront ces mouvemens & ces variations.

Auſſi-tôt que j'eus reconnu la libration du nœud, j'examinai les obſervations, & je vis qu'elles pouvoient ſervir à démontrer cette libration.

M. Maraldi, à qui je n'avois pas encore communiqué cette idée, s'en apperçut de ſon côté en combinant les obſervations,

& m'en donna avis au mois de Mars 1765. Nous fîmes part de cette découverte à l'Académie le mois suivant, & nos Mémoires furent lus le même jour.

Ceci nous explique pourquoi depuis plus d'un siecle on n'a pas pu s'assurer d'un changement sensible dans la position du nœud du second Satellite. D'abord toutes les observations faites dans le tems de la plus grande & de la plus petite inclinaison, ont dû donner le même lieu du nœud : les autres paroissoient donner ce lieu plus ou moins avancé ; mais le mouvement dans différens sens devoit être attribué à l'erreur des observations & à l'incertitude de l'inclinaison. En prenant de longs intervalles de tems, on ne trouvoit pas plus de lumiere, parceque ces mouvemens du nœud sont périodiques. On avoit donc placé les nœuds des Satellites dans le point de l'orbite de Jupiter où on les avoit observés plus souvent, c'est-à-dire, dans le centre de leur libration.

Si la variation de l'inclinaison n'étoit due qu'à l'action du premier, l'inclinaison du Satellite perturbateur étant A, & l'inclinaison mutuelle des deux orbites B, l'inclinaison du Satellite troublé seroit $A + B$ au commencement de la période, & $A - B$ au bout de la demi-période. Mais nous avons vu, par le §. XVIII, que l'angle B augmente de $4' 54''$, en vertu de l'action du troisieme, dans l'intervalle d'une demi-période. L'inclinaison sera donc alors $A - B - 4' 54''$, en prenant pour B la valeur qu'il avoit au commencement du mouvement.

Maintenant M. Maraldi trouve que la plus grande inclinaison du second Satellite est $3° 45' 34''$, & la plus petite $2° 43'$. Mais il faut bien remarquer que ces inclinaisons sont déduites de l'hypothese de l'ombre circulaire, & que celles sur lesquelles nous avons établi les formules précédentes, sont

les inclinaisons réelles, c'est-à-dire, celles qui sont déduites de l'ombre elliptique. Ces inclinaisons, réduites dans le rapport de 14 à 13, deviendront de 3° 29′ 26″ & de 2° 31′ 21″.

En comparant ces inclinaisons à celle du premier 3° 4′, qui est le pivot sur lequel roulent tous ces mouvemens, on trouvera que la plus grande inclinaison du second la surpasse de 25′ 26″, & que la plus petite est en défaut de 32′ 39″. La différence est de 7′ 13″; & quoiqu'elle excede la quantité déterminée dans le Paragraphe précédent, qui ne va qu'à 4′ 54″, cependant elle prouve l'existence de cette variation.

La théorie donne 2′ 19″ de moins pour cette variation; mais cette différence peut venir de plusieurs causes. 1°. Les quantités calculées d'année en année ne sont peut-être pas assez exactes, & il faudroit les calculer pour des intervalles de tems moins longs. 2°. L'inclinaison mutuelle des orbites du troisieme & du premier, que nous croyons être de 12 30″, est peut-être trop petite. C'est ce qui ne pourra être décidé pleinement que lorsque l'inclinaison du troisieme aura atteint son *maximum*. 3°. La plus grande inclinaison du second, déterminée par M. Maraldi, est peut-être un peu plus forte qu'il ne l'a supposée, & il ne faut l'augmenter que d'une minute pour que tout soit d'accord. C'est à cette derniere supposition que nous nous en tiendrons pour le présent, parceque'une minute sur l'inclinaison produit une si petite différence sur la demi-durée, qu'il est très difficile de s'en assurer par les observations. D'ailleurs M. Wargentin suppose dans ses Tables la plus grande inclinaison de 3° 31′ 37″.

La différence avec l'inclinaison du premier est donc de 27′ 37″. Cette différence, augmentée de 4′ 54″, fait 32′ 31′, qui, retranchées de 3° 4′, donnent 2° 31′ 29″ pour la plus petite inclinaison, qui ne differe que de 8″ de celle de M. Maraldi.

Nous établirons donc la plus grande inclinaison 3° 31′ 37″.
la plus petite . . . . 2° 31′ 29″.

§. XXI.

Alors, avec les formules du §. XIII, dans lesquelles on mettra pour chaque année, 1°. les valeurs de sinus AB & de cos AB, relatives au mouvement uniforme du nœud de 12° par an ; 2°. pour l'angle A 3° 4′, qui est l'inclinaison du premier ; 3°. pour l'angle B sa valeur 27′ 37″, en y ajoutant, chaque année de la période, les quantités trouvées dans le Paragraphe précédent. Au moyen de ces substitutions, on déduira, des formules pour chaque année, le mouvement du nœud & l'inclinaison. C'est ainsi que nous avons dressé la Table suivante, dans laquelle nous avons réduit les inclinaisons à celles qui seroient déduites de l'orbite circulaire, parceque, comme nous l'avons remarqué dans la seconde Partie, cela ne produit aucune différence sur les demi-durées, & que le calcul en est plus expéditif.

0	0° 0′	3° 48′ 0″	30
1	— 1 34	3 47 30	29
2	— 3 6	3 46 10	28
3	— 4 35	3 43 39	27
4	— 5 59	3 40 10	26
5	— 7 14	3 35 43	25
6	— 8 17	3 30 24	24
7	— 9 5	3 24 19	23
8	— 9 33	3 18 24	22
9	— 9 37	3 10 44	21
10	— 9 20	3 3 47	20
11	— 8 13	2 57 26	19
12	— 6 50	2 51 36	18
13	— 4 53	2 47 7	17
14	— 2 34	2 44 17	16
15	+ 0 0	2 43 9	15.

La premiere & la quatrieme colonnes indiquent les années de la période ; la seconde, le mouvement du nœud ; & la troisieme, l'inclinaison.

§. XXII.

Telles sont les inclinaisons & les variations du nœud, en partant d'une époque quelconque : mais il faut observer que dans les quinze dernieres années, les variations du mouvement du nœud deviennent positives, & doivent s'ajouter au lieu qui sert d'époque.

Si l'on vouloit connoître ces variations, dans la supposition que la période fût de trente-deux ans, on pourroit les déduire très facilement de la Table précédente.

Cette Table suppose que le mouvement du nœud sur l'orbite du premier est de 12° par an, puisque la révolution s'acheve en trente ans. Mais ce mouvement ne seroit que de 11° 15', si la période ne s'achevoit qu'en trente-deux ans. Il ne s'agit donc que de prendre des parties proportionnelles.

Pour donner une idée de l'accord des demi-durées calculées sur cette Table avec celles qui ont été observées directement, je place ici la petite Table suivante, qui montre les erreurs de mes Tables dans les deux périodes supposées, & les erreurs des Tables de M. Wargentin.

	Demi-durée observée.	*Calculée sur la période de 30 ans.*	*Calculée sur la période de 32 ans.*	*M. Wargentin.*
11 Janv. 1668,	1h 19' 0"	—4' 30"	—1' 39"	—3' 51"
22 Sept. 1680,	1 13 30	—0 10	—3 2	—2 33
23 Août 1715,	1 7 48	—0 55	—1 39	—0 31
17 Sept. 1715,	1 7 10	+1 3	+0 26	+0 10
5 Sept. 1727,	1 15 12	—1 17	—0 17	—1 58
26 Fév. 1740,	1 13 45	—0 57	—1 8	+0 11
17 Août 1750,	1 9 43	—1 1	—1 1	+1 36
Janv. 1751,	1 7 21	—0 13	—0 13	+3 33
11 Sept. 1751,	1 11 44	+0 10	+0 10	+0 16
3 Sept. 1753,	1 17 1	+0 9	+0 9	+1 57.

Je remarque que les deux hypothefes fur la durée de la période repréfentent chacune beaucoup mieux les demi-durées obfervées, que l'hypothefe de M. Wargentin : & cela doit être ainfi, puifque ce célebre Aftronome n'a pu établir les variations de l'inclinaifon que d'une maniere empyrique, & que les miennes font déduites de la théorie. A l'égard de la préférence que l'on doit donner à l'une ou à l'autre des hypothefes fur la durée de la période, en fuppofant qu'elle foit de trente ans, comme M. Maraldi l'a établie, on trouve pour 1668, une erreur de 4′ ½ fur la demi-durée. Il eft vrai que M. Maraldi m'a dit que ne voyant pas le moyen de les mettre toutes d'accord, il ne s'étoit pas arrêté à celle-là, parcequ'il fuppofoit qu'étant la premiere qu'on avoit faite, mille raifons avoient pu contribuer à la rendre défectueufe, & que toutes ces raifons s'étoient réunies pour la faire paroître plus longue. Il eft difficile que cela puiffe produire une erreur de 4′ ½. Dans la période de trente-deux ans, au contraire, cette erreur n'eft plus que de 1′ 39″, & toutes les autres demi-durées font auffi bien & mieux repréfentées que dans la période de trente ans; à l'exception de celle de 1680; mais cette obfervation eft très fufpecte. L'immerfion fut obfervée à Paris à 10ʰ 42′ 15″, & à 13ʰ 11′ 15″ le Satellite étoit forti. Combien y avoit-il de tems? C'eft ce qu'il eft difficile d'eftimer. C'eft pourquoi nous avons diminué cet intervalle de tems de 2′, & que nous avons réduit la demi-durée à 1ʰ 13′ 30″: nous fuppofons par conféquent qu'il y avoit deux minutes que le Satellite étoit forti. Mais il pouvoit y avoir tout de même 4′ ou 6′; & comme nous ne pourrions rien conclure en notre faveur d'une telle obfervation, de même elle ne peut faire rien conclure contre nous. Il me paroît donc que la période de trente-deux ans feroit préférable à celle de trente ans. Peut-être faudroit-il

l'établit de trente-un ans, comme a fait M. Wargentin; mais cette détermination demande la plus grande attention, & nous la remettons à un autre tems, lorsque nous aurons connu le sentiment de MM. Maraldi & Wargentin.

§. XXIII.

Quant à l'époque du mouvement du nœud, c'est-à-dire, quant au point de l'orbite de Jupiter où se trouve placé le lieu du nœud du premier, & d'où le nœud du second commence son mouvement, je l'avois d'abord supposée, comme M. Wargentin, dans $10^s\ 11^\circ\ 48''$: mais la théorie des demi-durées du troisieme Satellite m'ayant fait connoître qu'il falloit la supposer dans $10^s\ 13^\circ\ 52'$, je m'en suis tenu à cette derniere détermination, & je crois que les observations seront aussi bien représentées. Mais c'est un objet que je me propose d'examiner par la suite.

Les demi-durées des éclipses du premier Satellite ne seront pas moins bien représentées, quoique j'aie changé de 2° le lieu de son nœud, parceque ces 2° ne peuvent jamais produire que $8''$ sur la demi-durée dans les cas extrêmes. Quelque parfaites que soient les observations & la théorie de ce Satellite, il est difficile qu'une si petite différence y soit sensible.

§. XXIV.

Nous n'avons tenu aucun compte du mouvement du nœud produit par l'action du quatrieme, tant parceque ce mouvement est fort petit, que parceque son effet doit être compris dans la période de trente ans: il en doit résulter seulement une légere différence sur les masses; mais il n'est pas difficile de voir qu'elle ne doit être de nulle considération.

Le mouvement dû à l'action du Soleil, que nous avons

déterminé de 1′ 7″ par an, doit être aussi négligé. Il doit allonger la premiere demi-période de quinze jours, & raccourcir l'autre d'environ trois semaines. La théorie des Satellites sera bien perfectionnée, lorsqu'elle exigera de pareilles attentions.

QUATRIEME SECTION.

Application à la théorie du troisieme Satellite.

§. XXV.

LA THÉORIE des demi-durées de ce Satellite est beaucoup plus difficile que celle des demi-durées du second, parceque les observations sont plus incertaines. Comme il se meut plus lentement, il est plus long-tems à diminuer de grosseur : la différence des vues & celle des instrumens doivent donc y être plus sensibles.

§. XXVI.

Si la variation de l'inclinaison de ce Satellite avoit une période qui fût connue comme celle de la variation de l'inclinaison du second, cette période feroit connoître la loi des variations; mais comme elle est vraisemblablement fort longue, puisque l'inclinaison, qui étoit dans son *minimum* en 1697, n'a pas cessé de croître jusqu'à présent, nous n'avons pas encore; en soixante & huit ans, vu achever une demi-période.

L'action du premier Satellite est celle qui doit avoir l'effet le plus sensible, puisque le mouvement du nœud qu'elle produit est de 59′ 51″,

J'ai

J'ai donc repris les formules du §. XXII; & supposant l'angle A, ou l'inclinaison du premier, de 3° 4', j'ai fait l'angle B de 16', parceque M. Maraldi trouve que la plus petite inclinaison a dû être environ 2° 48'.

J'ai pris les deux inclinaisons observées dans les tems les plus éloignés de 1697; savoir, celles des années 1661 & 1763; la premiere de 2° 57' 28", la seconde de 3° 12' 10". J'ai donc eu dans les deux cas la valeur de $\cos C$.

Ainsi, dans la formule

$$\cos C = \cos B(\cos A - \sin A \tan B \cos AB),$$

au moyen des angles supposés A & B, & de l'angle connu C, j'ai déduit la valeur de $\cos AB$, & par conséquent l'arc AB, ou le mouvement du nœud pendant les deux intervalles de tems; savoir, de 1661 à 1697 un arc de 64° 34' 50", ce qui fait à peu près 1° 48' 45" de mouvement annuel; de 1697 à 1763 un arc de 117° 40' 10", ce qui fait à peu près 1° 48' de mouvement annuel.

Les inclinaisons calculées sur cette détermination du mouvement du nœud étoient beaucoup trop petites en 1727, où l'inclinaison a été déduite d'observations très exactes.

§. XXVII.

Le mouvement du nœud, produit par les perturbarions du second, est de 17' 44".

J'y ai eu égard en déterminant la variation de l'inclinaison du troisieme qui en dépend, par la formule

$$dC = dAB.\int A \sin AC,$$

dans laquelle AB [*fig.* 13.] étant l'orbite du second, & BC l'orbite du premier, la variation annuelle de l'inclinaison du

troisieme sera égale au mouvement du nœud multiplié par le sinus de l'inclinaison variable du second, & par le sinus de la distance de leurs nœuds sur l'orbite de Jupiter.

§. XXVIII.

En appliquant ces variations que j'avois trouvées, j'ai vu que la valeur que j'avois assignée à B étoit trop grande, & que conséquemment M. de Maraldi [a] avoit supposé l'inclinaison trop petite.

J'ai cru qu'il falloit, en supposant toujours l'angle A de $3^\circ\ 4'$, & le mouvement annuel du nœud de $1^\circ\ 48'$, donner à l'angle B la valeur de $12'\ 30''$. J'ai déduit ces hypotheses des inclinaisons qui, corrigées des variations dues aux perturbations du second, représentent fort bien une trentaine d'observations prises depuis 1673 jusqu'en 1763.

§. XXIX.

J'ai lieu de croire qu'un plus grand nombre d'observations seroient également bien représentées, parceque j'ai choisi exprès celles qui paroissoient devoir s'écarter le plus.

Cette hypothese, établie sur les observations, a besoin d'être confirmée par la théorie; & pour cela, il suffit de faire voir que le mouvement du nœud sur l'orbite du premier, déduit des masses que nous avons établies, est d'environ $1^\circ\ 48'$ par an.

Ce mouvement, par les perturbations du premier, est de

[a] M. Maraldi l'a déduite très exactement de l'observation de la demi-durée : mais si cette demi-durée a été observée trop longue, l'inclinaison qu'on en déduira sera trop petite.

Une hypothese faite pour représenter les demi-durées, est toujours meilleure, lorsqu'elle peche par défaut, que lorsqu'elle peche par excès, parcequ'à mesure que les lunettes deviennent plus parfaites, on suit le Satellite plus long-tems; & conséquemment les demi-durées observées sont moins longues.

59′ 51″, §. IX. Mais en même tems le nœud, ou l'intersection des orbites du premier & du troisieme, recule sur celle du troisieme, par son action, de 37′ 44″ par an.

Soit [*figure* 13.] *AB* l'orbite du premier, *BC* celle du troisieme, *AC* celle de Jupiter.

L'orbite *AB* rétrogradant sur l'orbite *BC*, en faisant toujours l'angle *B* constant, on a, par les formules différentielles, $d. BC : d. AB :: \sin A : \sin C \cos AC$. Donc la quantité dont le nœud *B* rétrograde sur l'orbite du premier, est exprimée par $\frac{d. BC \sin C \cos AC}{\sin A}$. Mais l'arc *AC*, ou la distance des nœuds sur l'orbite de Jupiter, n'excédant jamais 4°, cos *AC* sera à peu près l'unité.

L'expression $\frac{d. BC \sin C}{\sin A}$ sera donc presque constante, puisqu'elle ne souffrira d'autre variation que celle du sinus de l'angle *A*, qui est le sinus de l'inclinaison du troisieme.

Quand cette inclinaison sera de 2° 51′ 30″, le mouvement du nœud sur l'orbite du premier sera de 40″ 12″; quand elle sera dans son *maximum* de 3° 16′ 30″, il sera de 35′ 16″. De sorte que son mouvement moyen sera de 37′ 44″.

§. XXX.

Quant au sens de ce mouvement, il est évident qu'il sera toujours rétrograde sur l'orbite du premier comme sur celle du troisieme, parceque *AC* n'étant jamais qu'un arc de quelques degrés en deça ou au-delà du point *A*, son cosinus ne change point de signe.

Le mouvement du nœud du troisieme sur l'orbite du premier, en vertu de ces deux mouvemens, sera donc de 59′ 51″ + 37′ 44″.

§. XXXI.

Le nœud du troisieme rétrograde sur l'orbite du second, par l'action de ce Satellite, de 17′ 44″ par an. C'est cette rétrogradation qui produit la variation de l'inclinaison que nous avons calculée §. XXVII.

Soient [*fig.* 11.] *AD*, *ED*, *CB* les orbites du troisieme, du premier & du second.

L'orbite *ABD* sera donc annuellement transportée le long de *CB*, d'une quantité de 17′ 44″.

Il s'agit de déterminer de combien l'arc *DF* en sera altéré, c'est-à-dire, de déterminer l'effet de ce mouvement réduit à l'orbite du premier Satellite.

Dans le triangle *BDF*, nous connoissons l'angle *F*, inclinaison du second sur le premier, qui est de 27′ 37″; l'angle *D*, qui est l'inclinaison du troisieme sur le premier. Notre hypothese le suppose de 12′ 30″. L'arc *FE* est le chemin du nœud du second sur l'orbite du premier, qui est de 12° par an: l'arc *ED* est le chemin du nœud du troisieme sur l'orbite du premier, supposé ici de 1° 48′ par an. L'arc *DF*, différence de ces deux arcs, croîtra donc annuellement de 10° 12′. Ainsi, en partant d'une époque où l'on ait calculé l'arc *DF*, cet arc sera toujours connu.

Maintenant on trouvera que

$$d.\,BF : d.\,DF :: \sin BF : \sin DF \cos BD.$$

Au moyen de la formule des deux angles & du côté compris, on calculera par la trigonométrie la valeur des sinus *BF* & cosinus *BD*; & l'on trouvera, après avoir fait toutes les réductions, $d.\,DF = d.\,BF\left(1 + \frac{\sin F}{\sin D}\cos DF\right)$,

ou . . . $d.\,DF = 17' \, 44''(1 + 2,210 \cos DF)$.

§. XXXII.

L'expreſſion précédente nous fait connoître que ce mouvement ſera rétrograde, tant que coſinus DF ſera poſitif, & en outre tant que coſinus DF étant négatif, $2,210 \cos DF$ ſera moindre que l'unité.

Mais ne prenant ici que la quantité moyenne $17' 44''$, & l'ajoutant à celle qui a été trouvée §. XXX, on aura, pour le mouvement moyen du nœud du troiſieme ſur l'orbite du premier, $1° 54' 59''$.

Quant à la détermination du Paragraphe précédent, elle n'eſt qu'à peu près exacte, parcequ'elle ſuppoſe que les angles F & D ſont invariables; & il eſt ſûr que ces angles doivent être altérés dans la combinaiſon de tous ces mouvemens. Mais comme ces altérations ne ſont pas conſidérables, comme elles ſe rétabliſſent la plupart au bout d'une certaine période, le réſultat moyen que nous venons de tirer eſt ſuffiſamment exact.

§. XXXIII.

On pourra par la ſuite calculer une Table des variations de la quantité moyenne $17' 44'$ du §. XXXI, afin d'avoir le mouvement du nœud pour chaque année.

§. XXXIV.

Quant au mouvement du nœud du troiſieme par les perturbations du quatrieme, qu'il faut réduire à l'orbite du premier, ſoient [*fig.* 12.] les orbites AC, FC, EB des premier, troiſieme & quatrieme Satellites.

Soient, dans le triangle BDC, les angles B & C connus, puiſque ce ſont les inclinaiſons du premier ſur le quatrieme & du troiſieme ſur le premier, l'un de 40′, & l'autre de 12′ 30″.

Le nœud B du quatrieme Satellite ſe meut ſur l'orbite du premier de 6′ 34″ par an. Le nœud D du quatrieme ſur l'orbite du troiſieme rétrograde auſſi de 31′ 6″ par an. Mais comme les inclinaiſons des orbites du troiſieme & du premier different peu, nous pourrons ſuppoſer ici que ces deux mouvemens ont lieu ſur l'orbite du premier, & conſéquemment que le nœud B rétrograde de 37′ 40″ par an ſur cette orbite.

Mais le nœud C du troiſieme rétrograde ſur cette même orbite de 1° 48′ par an. Donc l'arc BC étant une fois connu, il croîtra de 1° 10′ 20″ par an.

La figure nous démontre que le mouvement rétrograde ſur l'orbite du quatrieme ſera direct ſur l'orbite du premier.

Nommant donc ſin $C \cdot\cdot\, a$, ſin $B \cdot\cdot\, b$, coſ $BC \cdot\cdot\, x$; on aura $d.\,BD : d.\,BC :: ſ.\,BD : ſ.\,BC \text{ coſ } CD$,

$$d.\,BC = \frac{d.\,BD.\,ſ.\,\dot{B}C \text{ coſ } CD}{ſ.\,CD} = \frac{bx - a}{a}\left(\frac{a^2 + b^2 + 2abx}{a^2 + b^2 + 2abx}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

§. XXXV.

Le mouvement du nœud du troiſieme par l'action du quatrieme, réduit à l'orbite du premier, ſera donc toujours direct, lorſque x, ou le coſinus BC, étant poſitif, bx ſera plus grand que a; & c'eſt préciſément ce qui a lieu depuis 1697. Ainſi le mouvement du §. XXXII a été diminué par l'action du quatrieme. Il ne s'agit pas ici de voir ſi la quantité dont ce mouvement rétrograde a été diminué, eſt celle qui réſulte

de la masse du quatrieme & de la formule ; il faut au contraire que cette diminution serve à déterminer la masse du quatrieme, qui, comme on l'a vu, n'a été estimée que par un tâtonnement.

§. XXXVI.

Quand on aura calculé les Tables du mouvement du nœud, dû à l'action du second & du quatrieme, réduit à l'orbite du premier, on comparera le mouvement déduit de ces Tables, au mouvement observé pendant deux intervalles de tems assez grands, & choisis dans les cas où les plus grandes variations auront lieu. Ces deux comparaisons serviront à fixer la masse du quatrieme. J'indique ici ce plan de travail, que je n'aurois pas maintenant le tems d'entreprendre, & sur lequel je me propose de revenir.

§. XXXVII.

Il résulte de tout ceci, qu'on peut déduire très bien de la théorie le mouvement du nœud du troisieme Satellite, qui produit les variations observées dans son inclinaison. Ces variations si singulieres sont donc une suite nécessaire de la loi de l'attraction.

§. XXXVIII.

Nous nous en tiendrons au mouvement 1° 48′, déterminé par l'observation [§. XXVI]. Ce mouvement admis, il s'ensuit que la période des variations de l'inclinaison doit être de deux cens ans, & qu'ayant été dans son *minimum* en 1697, elle sera dans son *maximum* 3° 16′ 30″ en 1797, plus ou moins, suivant les variations produites par l'action du second. On

imagine aiſément combien une pareille prédiction doit avoir de reſtrictions ; & je ſerois bien fâché qu'on la regardât comme telle. Il eſt poſſible que le mouvement dû à l'action du ſecond & du quatrieme accélere ou retarde le mouvement moyen de 1° 48′, & qu'ainſi la période ſe trouve accourcie ou allongée. Pour ſe flatter d'être parvenu à une détermination exacte de cette période, il faudroit avoir dreſſé les Tables indiquées par les formules des Paragraphes XXXI & XXXIV, avoir déduit plus exactement la valeur de la maſſe du quatrieme par la comparaiſon propoſée dans le §. XXXVI.

§. XXXIX.

Cette période eſt donc celle qui m'a paru repréſenter aſſez bien les obſervations faites juſqu'à préſent : & ſans oſer répondre qu'elle repréſente auſſi bien les obſervations futures, je crois qu'elle prouve ce qu'on peut attendre de la théorie, quand les ſuppoſitions ſur leſquelles elle eſt établie, auront été rectifiées par les moyens que je me propoſe d'employer.

§. XL.

En conſéquence, on a dreſſé la Table ſuivante des inclinaiſons du troiſieme, & des diſtances de ſon nœud au nœud du premier ſur l'orbite de Jupiter.

Le ſigne + marque que celui du troiſieme eſt plus avancé.

Les inclinaiſons ſont réduites à l'hypotheſe de la ſection de l'ombre circulaire.

Inclinaiſon.

Inclinaison.

1697	3°	4′	42″	+ 0°	0′	1697
1702	3	4	53	+ 0	39	1692
1707	3	5	25	+ 1	17	1687
1712	3	6	18	+ 1	52	1682
1717	3	7	24	+ 2	24	1677
1722	3	8	51	+ 2	52	1672
1727	3	10	27	+ 3	16	1667
1732	3	12	9	+ 3	43	1662
1737	3	14	18	+ 3	47	1657
1742	3	16	5	+ 3	50	
1747	3	18	39	+ 3	53	
1752	3	20	54	+ 3	47	
1757	3	22	52	+ 3	36	
1762	3	24	46	+ 3	21	
1767	3	26	29	+ 3	0	
1772	3	28	0	+ 2	36	
1777	3	29	15	+ 2	9	
1782	3	30	15	+ 1	39	
1787	3	31	4	+ 1	7	
1792	3	31	30	+ 0	34	
1797	3	31	38	+ 0	0.	

§. XLI.

On ajoutera à ces inclinaiſons, les corrections réſultantes de la formule du §. XXXI, pour la variation due aux perturbations du ſecond.

J'établirai le demi-diametre de l'ombre en tems 1 47′ 10″, tel que M. de Maraldi l'a déduit des obſervations ; le lieu

du nœud du premier, comme dans la Section précédente, 10ˢ 13° 52′.

§. XLII.

On tiendra compte du mouvement du nœud 2′ 15″, dû aux perturbations du Soleil, & déterminé dans la premiere Partie, §. XX, en faisant rétrograder le nœud annuellement de cette quantité. La distance respective du nœud du troisieme & du nœud du premier sur l'orbite de Jupiter, & les inclinaisons du §. XL, qui en dépendent, ne seront pas fort altérées par ce mouvement, parceque le nœud du premier, comme on le verra dans la Section suivante, a lui-même un mouvement rétrograde, produit par l'action du Soleil & par celle des trois autres Satellites.

CINQUIEME SECTION.

Du mouvement du Nœud du quatrieme & du premier, & des variations de leurs Inclinaisons.

§. XLIII.

Nous ne chercherons point ici ce que donne la théorie pour le mouvement du nœud du quatrieme, puisque ce mouvement est une des données, qui a servi à fixer la valeur des masses. Nous insisterons seulement sur la nécessité de déterminer avec précision sa véritable quantité, afin d'en déduire les légeres corrections qui doivent être faites aux masses établies dans la troisieme Partie.

Nous allons examiner maintenant les variations de son

inclinaiſon, & nous la déduirons de la formule

$$d. C = d. AB\ \text{ſ}. A \sin AC, \quad [\textit{fig. } 13.].$$

A repréſente l'inclinaiſon du Satellite perturbateur. Cette inclinaiſon eſt variable à l'égard du ſecond & du troiſieme: mais nous pouvons nous contenter ici de prendre l'inclinaiſon moyenne, toujours égale à celle du premier.

La variation de l'inclinaiſon du quatrieme ſera donc exprimée ainſi,

$$d. C = \sin 3^\circ 4' (6' 34'' \sin AC + 1' 13' \sin AC' + 31' 6'' \sin AC''),$$

en ſuppoſant que *AC*, *AC'*, *AC''* ſont les diſtances du nœud du quatrieme au nœud du premier, du ſecond & du troiſieme: ce qui peut être encore réduit à

$$d. C = 21'' \sin AC + 4'' \sin AC' + 1' 40'' \sin AC''.$$

On a ſuppoſé que le nœud du Satellite perturbateur étoit moins avancé que celui du quatrieme. Ainſi, toutes les fois qu'il ſera plus avancé, le ſinus *AC* ſera négatif.

On voit, par cette formule, que depuis 1700 le lieu du nœud du quatrieme n'ayant pas été éloigné du nœud du premier de plus de 2° à 3°, la premiere équation a toujours été nulle. Quant à la ſeconde, elle eſt ſi petite qu'elle peut être négligée, d'autant plus qu'elle eſt périodique. A l'égard de la troiſieme, elle mérite plus d'attention: cependant elle n'a dû avoir aucun effet juſqu'ici, parceque les nœuds du troiſieme & du quatrieme étant tous les deux directs, leur diſtance a été juſqu'ici aſſez petite. Mais comme le nœud du troiſieme commence à devenir rétrograde, tandis que l'autre ſera toujours direct, il faudra en tenir compte. En ſuppoſant que leur diſtance fût un jour de 15°, cette variation ſeroit de 25'' par an.

§. XLIV.

Le mouvement du nœud du premier, dû à l'action du second, sera, suivant la formule [*fig.* 13.], $d.AC = \frac{d.AB \sin B \cos BC}{\sin C}$, & la variation de l'inclinaison $d.C = d.AB \sin A \sin AC$. On en déduira très aisément le mouvement annuel du nœud, en mettant, pour $d.AB$, sa valeur 45′ 49″, §. VII; pour C, 3° 4′, inclinaison du premier; pour B, 27′ 37″; & enfin pour BC, l'arc qui mesure le chemin du nœud du second sur l'orbite du premier. Ce chemin a été déterminé dans la troisieme Section, de 12° par an. Ainsi BC sera toujours connu. Mais comme BC sera négatif lorsque le nœud du second sera plus avancé que celui du premier, il en résulte que le nœud du premier aura un mouvement de libration autour de son lieu moyen, dont il s'écartera d'environ 18′. L'inclinaison sera assujettie à une variation de 4′: ensorte que la plus grande & la plus petite inclinaison du premier différeront de 4′. La période de ces variations sera la même que celle des variations de l'inclinaison du second Satellite, mais avec cette différence, que l'une sera la plus petite quand l'autre sera la plus grande. Ces variations seront examinées & établies avec plus d'exactitude par la suite : nous nous bornons ici à les indiquer.

§. XLV.

En appliquant les mêmes formules aux perturbations du troisieme, on aura $d.AB = 37' 44''$, $B = 12' 30''$, $C = 3° 4'$; on trouvera le mouvement annuel du nœud 2′ 34″ cos BC, mouvement direct, tant que cos BC sera positif. L'arc BC est le chemin du nœud du troisieme sur l'orbite du premier : il croît de 1° 48′ par an, & étoit de 180° en 1697.

La variation de l'inclinaison déduite de la formule du Pa-

ragraphe précédent, en prenant pour A, l'inclinaiſon moyenne du troiſieme Satellite $3° 4'$, eſt $2' 1''$ ſin AC, l'arc AC étant la diſtance du troiſieme à celui du premier. Et comme cette diſtance n'excédera jamais $3° 53'$, la plus grande variation annuelle ſera de $8''$, additive, lorſque le nœud du troiſieme ſera plus avancé que celui du premier, & ſouſtractive, au contraire.

§. XLVI.

Quant aux perturbations du quatrieme, on aura $d.\,AB = 2' 4''$, $B = 40'$, $A = 2° 24'$, $C = 3° 4'$; & le mouvement annuel & rétrograde du nœud ſera $27''$ coſ BC.

Etant données la diſtance des nœuds AC du quatrieme & du premier ſur l'orbite de Jupiter, & leurs inclinaiſons A & C, on aura toujours BC, & par conſéquent le mouvement du nœud C. Nous ne tiendrons point compte des variations de l'inclinaiſon dues aux perturbations du quatrieme, parcequ'elles ſont inſenſibles.

Le mouvement du nœud du premier, dû à l'action du Soleil, trouvé dans la premiere Partie, eſt de $33'', 5$ par an. Ainſi le mouvement du nœud du premier ſera en général, en faiſant abſtraction de celui qui eſt périodique, & qui eſt dû à l'action du ſecond, $- 33'', 5 + 2' 34''$ coſ $BC - 27''$ coſ BC'.

On trouvera facilement la quantité $2' 34''$ coſ BC pour chaque année par le Paragraphe précédent : on trouvera de même la quantité $- 27''$ coſ BC. Et comme depuis 1700 ces trois quantités ſont négatives, il eſt poſſible que le nœud du premier ait rétrogradé à cet égard de deux à trois degrés : & la preuve que ce mouvement a été apperçu par les obſervations, c'eſt que M. Wargentin avoit fixé ſon lieu dans $10^s\ 11° 48'$; & il l'avoit déterminé ſans doute ſur le plus grand accord des

obſervations. Il n'eſt pas inutile même de remarquer que, dans le Recueil d'obſervations calculées par M. Wargentin [a], les plus récentes ſont celles qui ſont le mieux repréſentées. Or les obſervations du troiſieme Satellite m'ont fait connoître qu'il falloit que le nœud du premier, en 1697, fût dans 10ˢ 13° 52′. Si celles du ſecond l'ont donné, vers le milieu de ce ſiecle, dans 10ˢ 11° 48′, il eſt clair qu'il y a une rétrogradation bien prouvée.

§. XLVII.

On peut eſſayer de déterminer à-peu-près le tems où le nœud du quatrieme Satellite ceſſera d'être direct.

On aura [*fig.* 13.] $\text{tang}\, AC = \frac{\text{tang}\, B \,\text{ſin}\, BC}{\text{tang}\, B\, \text{coſ}\, C\, \text{coſ}\, BC + \text{ſin}\, C}$, en prenant BC pour l'orbite du Satellite perturbateur, & AB pour celle du quatrieme. Je remarquerai enſuite, que, comme l'inclinaiſon moyenne des trois premiers Satellites eſt la même, c'eſt-à-dire, 3° 4′, je puis conſidérer les trois mouvemens qu'ils produiſent, comme s'ils l'étoient par un ſeul. J'aurai alors $B = 40'$, $C = 3° 4'$; & AC dans ſon *maximum* ſera de 12° 30′ 27″: de maniere que, lorſque la diſtance des nœuds du premier & du quatrieme ſera de 12° 30′ 27″, le nœud ceſſera d'être direct. Maintenant l'obſervation donne 5′ 33″ de mouvement direct au nœud du quatrieme, & le nœud du premier eſt rétrograde, par l'action du Soleil, de 33″ ½. Je fais abſtraction ici des deux autres mouvemens du nœud du premier. Celui qui eſt dû à l'action du troiſieme ne produiroit rien, parcequ'il eſt nul en cent ans, coſ BC ayant autant de valeurs négatives que de poſitives dans une demi-révolution des nœuds du troiſieme. A l'égard de celui qui eſt dû au quatrieme, il ſera facile d'en tenir compte, en calculant

[a] *Acta Societ. Reg. Upſalienſis*, ann. 1743.

ce qu'il peut produire. Mais en les laiſſant à part, les nœuds du premier & du quatrieme s'éloigneront annuellement de 6′ 6″; & par conſéquent, en cent vingt-trois ans, le nœud aura parcouru 12° 30′ 27″: il aura donc un mouvement de libration autour du nœud du premier, dont la période ſera d'environ quatre cens quatre-vingt-douze ans, ou un peu moins, à cauſe de ce que peuvent produire les quantités que nous avons négligées. Ceci n'eſt qu'une eſpece d'eſtimation: il ſera aiſé d'en faire un calcul plus exact.

§. XLVIII.

Il réſulte de cette théorie du mouvement des nœuds des Satellites de Jupiter, qu'en établiſſant le lieu du nœud du premier 10ˢ 13° 52′, 1°. le nœud du ſecond aura un mouvement de libration autour de ce point fixe, de 9° 37′, dont la période ſera de trente ou de trente-deux ans.

2°. Que le nœud du premier aura un mouvement de libration autour de ce même point, de 18′, dont la période ſera auſſi de trente ou de trente-deux ans.

3°. Que le nœud du troiſieme aura un mouvement de libration autour de ce même point, de 3° 53′ environ, dont la période ſera d'environ deux cens ans.

4°. Que le nœud du quatrieme aura un mouvemens de libration autour de ce même point, d'environ 12° à 13°, dont la période ſera très longue, comme d'environ quatre à cinq cens ans.

5°. Ce point fixe, ou le lieu moyen du premier, aura lui-même un mouvement rétrograde: ainſi le centre de la libration rétrogradera ſur l'orbite de Jupiter, & tranſportera ſucceſſivement dans chacun de ſes points le phénomene de la libration.

La théorie démontre donc très bien pourquoi les nœuds des

Satellites ont paru aux Astronomes qui les ont observés les premiers, placés au même point de l'orbite de Jupiter. Il a fallu des observations délicates & répétées, pour s'appercevoir qu'ils n'étoient pas réellement au même point. Ce mouvement de libration même avoit été inconnu jusqu'aujourd'hui, que M. Maraldi & moi l'avons découvert en même tems par les observations du second Satellite.

J'ai fait voir que ce mouvement de libration avoit lieu pour les quatre Satellites : & il est très satisfaisant d'avoir déduit de la théorie de Newton, la loi de ces apparences singulieres. C'est une nouvelle confirmation pour ce système fameux.

FIN.

TABLES

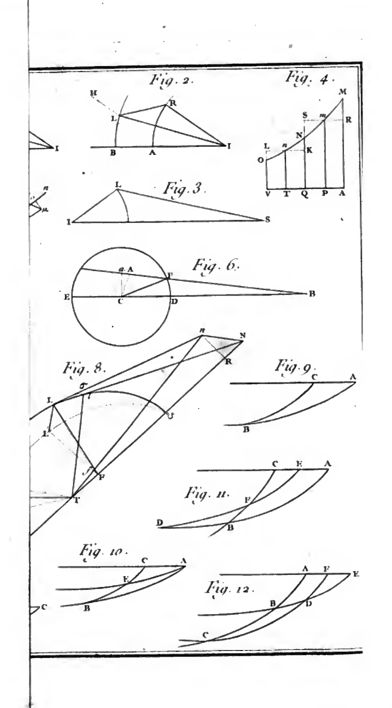


Fig. 2.
H
R
L
B
A
I
Fig. 4.
M
S
m
R
N
L
n
K
O
V
T
Q
P
A
Fig. 3.
L
I
S
Fig. 6.
a A
F
E
C
D
B
n
N
R
Fig. 8.
σ
L
l
L
F
T
Fig. 9.
C
A
B
C
E
A
Fig. 11.
F
D
B
Fig. 10.
C
A
E
B
C
A
F
E
Fig. 12.
B
D
C


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

